

Евразийский национальный университет Л.Н. Гумилева

УДК 536.9

На правах рукописи

КАСЕНОВА ТОЛКЫН КАЛМАХАНОВНА

Исследование связи теории узлов с моделями статистической механики

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени
доктора философии PhD

Научный руководитель:

Цыба Петр Юрьевич
PhD, и.о. доцента

Зарубежный научный руководитель:

Дуглас Синглетон
PhD, профессор
Калифорнийского государственного университета
(г. Фресно, США)

Республика Казахстан
Астана, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ИНВАРИАНТАМИ ТЕОРИИ УЗЛОВ И ВЕРШИННЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	21
1.1 Параметризованная 8-вершинная модель.....	22
1.1.1 Инвариант узла пятирядной косы	28
1.2 Трехчастичная вершинная модель и инвариант узла.....	28
1.2.1 Вершинная модель и R - матрица.....	30
1.2.2 Десятивершинная модель.....	32
1.3 Трехчастичная вершинная модель.....	35
1.3.1 R - матрица для разных спинов.....	37
1.3.2 Инварианты разноцветных узлов.....	44
Выводы по первому разделу.....	45
2 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРШИННЫХ МОДЕЛЕЙ ЧЕРЕЗ АЛГЕБРУ ГРАССМАНА	47
2.1 Уравнение R - матрицы для восьмивершинной модели над грассмановой алгеброй.....	49
2.2 Классификация решений уравнения Замолодчикова с восемью вершинами	54
2.2.1 Классификация решений по числовой части.....	55
2.3 Решение уравнения Замолодчикова над грассмановой алгеброй с 6-образующими.....	55
2.3.1 Представление грассмановых образующих в случае I.....	56
2.3.2 Представление грассмановых образующих в случае II.....	57
2.3.3 Представление грассмановых образующих в случае III.....	58
2.4 Классификация решений уравнения Замолодчикова с шестью вершинной моделью.....	60
2.5 Решение уравнения Замолодчикова над алгеброй Грассмана с 6-ю образующими.....	61
2.5.1 Расчет нильпонентных и числовых элементов. Случай I.....	62
2.5.2 Расчет нильпонентных и числовых элементов. Случай II.....	63
Выводы по второму разделу.....	64
3 ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	65
3.1 Точное решение для восьмивершинной спиновой модели.....	65
3.1.1 Коммутативные соотношения Янга-Бакстера.....	66
3.1.2 Собственное значение и состояние Бете в квантовом пространстве	67
3.2 Исследование связи десятивершинной модели с XXZ – моделью Гейзенберга.....	68

3.2.1 Энергия состояния в узлах квадратной решетки десятивершинной модели.....	69
3.2.2 Статистическая сумма больцмановских весов в вершинных моделях	70
3.2.3 Диагонализация трансфер матрицы в теории точно решаемых моделей.....	71
3.2.4 Собственное состояние и собственное значение трансфер – матрицы	72
3.3 Исследование связи десятивершинной модели с полиномом Джонса	76
3.3.1 Узлы из кос.....	78
3.3.2 Вершинная модель.....	78
3.3.3 Полином узла.....	82
Выводы по третьему разделу	83
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	85
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	87

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\# P$	– теорема о дихотомии
BMW	– Бирман-Мураками-Вензля
$SO(N)$	– специальная ортогональная группа
XYZ	– спиновая модель Гейзенберга
$SU(2)$	– группа симметрий встречается в физике элементарных частиц при рассмотрении спина и изоспина
j_i	– спин
$R(u)$	– матрица вершинной модели
u	– спектральный параметр
b_i	– генераторы кос
λ	– собственные значения матрицы
\aleph	– фактор нормализации
$q - CG$	– коэффициент Клебша-Гордана
α	– инвариант узла
l	– сумма показателей экспонент
A	– коса
\hat{P}	– матрица перестановки
$q^{\frac{1}{2}}$	– коэффициент деформации
r	– количество нитей
WZW	– модель Весса-Зумино-Виттена
J^{\pm}, J_z	– константа связи
e	– сумма показателей степени

NOMFLY – PT - Джима Хоста, Адриана Окняну, Кеннета Миллетта, Питера Дж. Фрейда, В.Б.Р. Ликориша и Дэвида Н. Йеттера. Добавление PT признает независимую работу, выполненную Юзефом Х. Призитским и Павлом Трачиком.

ВВЕДЕНИЕ

Оценка современного состояния изучаемой научной проблемы.

В настоящее время теория узлов и точно решаемые вершинные модели статистической механики превратились в масштабную область науки со своими проблемами, идеями и методами решения. Несомненно, наиболее важной задачей является получение точных результатов вычисления инвариантов узлов, определяющих статистическую сумму спиновой модели в термодинамическом пределе в зависимости от больцмановских весов.

В последние несколько десятилетий XX века ученые начали находить приложения теории узлов к задачам физики. Междисциплинарная область физической теории узлов изучает математические модели узлов, основанные на физических соображениях, для понимания явлений образования узлов в таких материалах, как ДНК или полимеры [1]. В физике было показано, что некоторые гипотетические квазичастицы, такие как неабелевы анионы, обладают полезными топологическими свойствами, а именно тем, что их квантовые состояния остаются неизменными в зависимости от изотопии окружающей их мировой линии. Есть надежда, что их можно будет использовать для создания устойчивого к декогеренции квантового компьютера. Поскольку мировые линии образуют математическую решетку, теория решеток, родственная ветвь теории узлов, используется для изучения свойств такого компьютера, называемого топологическим квантовым компьютером [2].

Основная проблема теории узлов - проблема распознавания эквивалентности двух узлов. Вольфганг Хакен является первым из ученых, который был разработал алгоритмы для решения этой проблемы в конце 1960-х годов. Однако эти алгоритмы отнимают очень много времени, и основной задачей в теории является понимание того, насколько сложна задача [3-6]. Особый интерес представляет особый случай, так называемая проблема разрешения узла [7]. В 1961 году Вольфганг Хакен открыл алгоритм, который мог определить, является ли узел нетривиальным. Он также изложил стратегию решения общей проблемы распознавания узлов, то есть определения того, являются ли два заданных узла эквивалентными или неэквивалентными. В начале 1970-х Фридрих Вальдхаузен объявил о завершении программы Хакена на основании своих результатов и результатов Клауса Йоханссона, Уильяма Якота, Петера Шалена и Джеффри Хемиона. В 2003 году Сергей Матвеев восполнил решающий пробел. Несколько крупных открытий в конце 20 века значительно обновили и популяризировали теорию узлов. В конце 1970-х Уильям Терстон ввел теорию гиперболических трехмерных многообразий в теорию узлов с помощью теоремы о гиперболизации и придал ей большое значение. В 1982 году Терстон получил за это открытие Филдсовскую медаль - высшую награду в области математики. Работа Терстона привела к эффективному использованию инструментов теории изображений и алгебраической геометрии после расширения других. Были получены важные результаты, в том числе дополнение узлов (с точностью до зеркального

отображения) и теорема Гордона-Люка, которые показали, что значение гипотезы Смита определено.

Интерес общего математического сообщества к теории узлов значительно возрос после того, как Воган Джонс открыл многочлен Джонса в 1984 году. Это привело к другим узловым полиномам, таким как скобочный полином, полином *HOMFLY* и полином Кауфмана [8]. В 1988 году Эдвард Виттен предложил новую основу для полинома Джонса, используя существующие идеи математических физиков, такие как линейные интегралы Фейнмана, и вводя новые концепции, такие как топологическая квантовая теория поля [9-11]. Виттеновское описание полинома Джонса представляет собой интегральные инварианты для трех многочленов. Одновременные, но разные подходы других математиков привели к инвариантам Виттена-Решетихина-Тураева и различные «квантовые инварианты», которые представляются математически строгими версиями инвариантов Виттена [12]. В 1980-х годах Джон Хортон Конвеем было исследовано поэтапное решение инварианта узлов, которая позже стала известна как знак Конвея.

Классические решеточные системы были введены в статистическую физику по следующим причинам:

1. Замена классической континуальной модели, в которой весьма проблематично вычислить статистический интеграл с общим потенциалом, решеточной моделью с существенным ограничением диапазона потенциалов. Из-за этого вместо «реального» межатомного потенциала, заданного некоторой функцией $v(r)$ с бесконечным числом возможных значений, появляется конечное множество значений этой функции в точках, определяемых возможными расстояниями между решетками узлов в потенциальном диапазоне. В случае одномерной модели Изинга, например, от «прежнего» межатомного потенциала остается только одна константа - величина потенциала взаимодействия между ближайшими соседями.

2. Из опыта известно, что при достаточно низких температурах (и других «благоприятных» внешних условиях) почти все вещества переходят в кристаллическое состояние. Однако существование самого кристаллического состояния еще не выведено из принципов статистической механики. Поэтому статистическую термодинамику кристаллического состояния имеет смысл строить в рамках модели, в которую аксиоматически включена кристаллическая структура.

3. Наконец, решеточные модели позволяют «выбрать» математический аппарат и провести последующую оценку эффективности разработанных аппроксимационных методов статистической физики.

Действительно важно неожиданное совпадение между двумя областями знания физиками и математиками, априори весьма далекими друг от друга. Однако пора перейти к другому совпадению, где речь идет уже о применении теории узлов к физике. Действительно, легко показывается, что полином $Z(K)$ инвариантен относительно второго и третьего преобразований Рейдмейстера, в то время как первое преобразование дает лишний множитель, от которого можно

избавиться благодаря другому множителю, зависящему от индекса скрещивания. Скобка Кауффмана, где она использовалась для определения полинома Джонса, определяется явной формулой, причем формула эта задается некоторой статистической суммой, определяемой статистической моделью, связанной с данным узлом. Отметим что скобка Кауффмана не имеет никакой физической интерпретации, по крайней мере в рамках реальных статистических моделей. Но в другой области физики - топологической квантовой теории поля - она сыграет свою роль. Эта теория, обычно обозначаемая английской аббревиатурой *TQFT* (Topological Quantum Field Theory), ищет формализацию квантовой версии теории классических полей (гравитационных, электромагнитных и т. д.) в самых широких т. е. в топологических рамках. При таком подходе изучаемые физические величины, наблюдаемые, не должны никоим образом зависеть от выбранной системы координат; они должны сохранять одни и те же значения при любом топологическом преобразовании координат; следовательно, они должны быть топологическими инвариантами, как и инварианты узлов. Американец Эдвард Виттен пришел к идее использовать для создания *TQFT* обобщение полинома Джонса. Это обобщение (на трехмерные многообразия), часто называемое инвариантом Джонса-Виттена, он использовал для создания *TQFT*.

Таким образом, мы имеем здесь с самого начала «очень физическую» структуру (слияние и расщепление частиц), и нет необходимости искать где-то «на стороне» другой алгебраический объект (такой, как квазитреугольная квантовая группа для инвариантов типа Виттена-Джонса), для нахождения «физических» инвариантов. Эта структура биалгебры внутренне присуща инвариантам Васильева. Но здесь есть и нечто большее.

Во-первых, с аналитической точки зрения, узловые инварианты Васильева можно выразить с помощью замечательного интеграла Концевича. Он является, в некотором смысле, обобщением интеграла Гаусса в электромагнетизме и должен, следовательно, иметь какую-то физическую интерпретацию. Какую? Неизвестно.

Во-вторых, с комбинаторной точки зрения, интерпретация инвариантов Васильева с помощью хордовых диаграмм, дает многочисленные алгебры, подходящие для физических интерпретаций. В частности, алгебра китайских характеров (которая еще совсем недавно называлась «алгеброй диаграмм Фейнмана») близка к теоретической физике, как указывает ее бывшее название. Но здесь мы пока находимся лишь на уровне надежд и гипотез. И наконец, последний важный пункт, также пока еще не понятый. Дрор Бар-Натан воспользовался тем фактом, что это соотношение - не что иное, как другая форма классического тождества Якоби, и построил инварианты Васильева на основе представлений алгебр Ли. Не будет ли иметь физического продолжения это совпадение между фундаментальными математическими соотношениями? Глядя на развитие топологической квантовой теории поля, мы должны рассмотреть ее многочисленные приложения к калибровочная теория Зайберга-Виттена, топологическая теория струн, отношения между теорией узлов и квантовая

теория поля, и инварианты квантовых узлов. Кроме того, это вызвало большой интерес как в математике, так и в физике. Также важный интерес в последнее время вызывают нелокальные операторы в $TQFT$. Если теория струн рассматривается как фундаментальная, то нелокальные $TQFT$ можно рассматривать как нефизические модели, обеспечивающие вычислительно эффективное приближение к локальной теории струн [13-16].

Важность, с точки зрения физической реальности, теории $TQFT$ (по линии Виттена, Атья, Вожеля, Йеттера) не оставляет ни малейшего сомнения. Очевидно, интерес к связям между физикой и узлами будет возрастать. Для специалистов по теории узлов также осталось много работы: например, до сих пор не существует достаточно простого и эффективного алгоритма развязывания, такого, чтобы его можно было перевести на компьютер; остаются открытыми и многие другие важные проблемы. Для специалистов в области математической физики, использующих идеи теории узлов, имеется много неисследованных областей, в частности по линии инвариантов Васильева. Наконец, не следует забывать, что кроме классических узлов (кривые в трехмерном пространстве) существуют малоизученные «обобщенные узлы», например, сферы (и другие поверхности) в пространстве размерности четыре. Согласно Эйнштейну, мы живем в четырехмерном пространстве-времени. По мнению специалистов, в теории струн, распространение элементарной частицы может моделироваться с помощью поверхностей. Не прячется ли за всем этим каким-то образом квантовая теория гравитации? Не имеют ли инварианты Васильева (которые должны существовать также и в этой ситуации) реальной физической интерпретации? Исследование всегда начинается с вопроса и с надежды.

Связь между теорией узлов и статистической механикой была впервые определена Джонсом [17]. В своем выводе полинома, Джонс отметил сходство используемой им алгебры фон Неймана с алгеброй, встречающейся в формулировке Темперли-Либа, примером которого является модель Поттса [18]. В 1986 году раскрыта прямая связь между двумя несвязанными пространствами, когда Кауффман [19] произвел удивительно простой вывод полинома Джонса, используя схематическое определение скобочного полинома. Спустя время после этого Джонс исследовал вывод полинома ($HOMFLY$) с использованием подхода вершинной модели. Связь теории узлов со статистической механикой была углублена для включения спиновых моделей Джонсом [20]. В частности, Джонс ввел угловые зависимости в вершинных моделях, характеризующих локальными весами.

Интригующее взаимодействие между теорией узлов и двухмерной физикой принесло значительную пользу обеим областям [21]. Позже было показано, что решеточные модели разрешимого термоядерного взаимодействия вокруг грани IRF находятся во взаимно однозначном соответствии с парой рациональной конформной теории поля и полем в ней [22]. Таким образом, в работе описывается инварианты узлов, которые находятся во взаимном

соответствии с парой рациональной конформной теории поля и полем в этой теории.

В последние годы ученые в области математики и физики усердно занимались смежными теориями, особенно теорией узлов, которая вызвала интерес у небольшого числа ученых и с тех пор стала одним из самых модных увлечений математиков, физиков и даже генетики. Это, в свою очередь, породило ряд методов, связывающих две, на первый взгляд, очень далекие друг от друга области математики и физики: теорию узлов и статистическую механику. Статистическая механика изучает системы, состоящие из чрезвычайно большого числа частиц, что не имеет ничего общего с малыми системами теории узлов. В то же время в теории узлов даже самые маленькие системы могут иметь довольно тонкие свойства. Однако некоторые алгебраические соотношения, используемые для расчета моделей в статистической механике, послужили ключом к математическому свойству узлов, известному как полиномиальный инвариант. Эта связь, сначала неуловимая, затем породила значительный поток идей. Возникновение такой связи вполне типично для современного этапа развития физики и математики, когда идеи, относящиеся к разным областям, взаимодействуют и приводят к неожиданным результатам.

В [23] было доказано, что шестнадцативершинная модель точно описывает термодинамику моделей искусственного спинового льда. Фазовая диаграмма шестнадцативершинной модели и природа равновесных фаз представлены как стохастическое расширение интегрируемой шестивершинной модели для учета тепловых флуктуаций в виде дефектов. В работе [24] подтверждается теорема о дихотомии $\#P$ - сложности для восьмивершинной модели. При каждом задании параметров модели доказывалось вычисление статистической суммы, которая либо разрешима за полиномиальное время, либо представляет собой сложность. Критерий дихотомии ясен, и для управляемости найдены некоторые новые классы задач, вычисляемых за полиномиальное время. Для $\#P$ - жесткости преобразования Мёбиуса используются для доказательства успеха интерполяций.

В диссертации вычислены точные выражения для многочлена Джонса для семейства зацеплений. В работе исследуется решение моделей статистической механики и теории узлов, которые, в свою очередь, в этой связи заняты алгеброй Темперли-Либа [25] и алгеброй Бирмана-Мураками-Вензля (*BMW*) [26]. Также в [27] изучаются последние исследования по связи вершинных моделей статистической механики с основными задачами математики, а также упоминаются наиболее важные и достоверные классические результаты Ф. Ву. Истоки связи с физикой восходят к очень тесной связи между моделями состояний узловых полиномов и статистической суммой в статистической механике. Эта связь в [28] привела к построению ряда инвариантов, выходящих за рамки исходных многочленов скейна. Можно сказать, что преобразование узла в косу упорядочивает размещение узла на решетке, создавая физическую модель с пересечениями узлов как взаимодействиями. Так, в источнике [29]

многочлен Джонса в замкнутой косе является статистической суммой модели статистической механики на косе. В работе [30] обобщена процедура вывода представлений генератора кос из трехчастичной вершинной модели. Это представление позволило изучить инвариант узла с разноцветными звеньями, где компоненты узла имеют разные спины. Формула инварианта узла с разноцветным звеном изучается с точки зрения образующих кос, полученных из R -матриц трехчастичных вершинных моделей. Полученный инвариант узла 5_2 соответствует полиному Джонса и $HOMFLY - PT$. Описание больцмановских весов и нахождение $SO(N)$ для любой N спин-вершинной модели алгебры в [31] открыло новые проблемы в области статистической физики. Представления группы кос в [32], полученные из рациональных конформных теорий поля, могут быть использованы для получения явных представлений алгебр Темперли-Либ-Джонса. В источнике [33] уравнение Янга-Бакстера обеспечивает как алгебраический, так и графический метод в теории узлов. Метод коммутирующих трансфер-матриц из [34] для этого уравнения является возможностью обобщения решения восьмивершинной модели. Изучаются антикоммутирующие квантовые спиновые системы, где квазиклассический предел приводит к некоторой абстрактной классической физике с антикоммутирующими переменными. Решением квантового уравнения Янга-Бакстера [35] является R -матрица, соответствующая передаточной R -матрице восьмивершинной модели статистической механики.

Метод решения инвариантов связан с разноцветными связями [36], со статистической суммой теории Черна-Саймонса [37] и с получением топологического решения $SU(2)$ теории Черна-Саймонса [38]. В подобных источниках, как и в [39], связь между инвариантом теории узлов и новой параметризованной вершинной моделью статистической механики изучалась с помощью перехода коммутирующей трансфер-матрицы, включающей больцмановские веса в матрицу кос. Далее в источнике [40] решения описываются с помощью коэффициентов Клебша-Гордана и матрицы преобразования.

Важным событием, произошедшим в конце XX века в математической теории узлов и зацеплений, является открытие новых и прямых способов построения инвариантов узлов методом статистической механики. Так как узлы и ссылки могут быть получены из замыкания группы косы, инварианты узлов и зацеплений могут быть получены из представления теории группы кос. Есть много способов решить представление различных групп кос. Квантом группы Дринфельда, а также самостоятельные исследования Ф.А. Березина [41] в области статистической и квантовой механики, статистическая сумма оказалась тесно связанной с инвариантами узлов (и зацеплений). Вершинные и IRF модели не только позволяют нам очень легко реконструировать полином Джонса из статистической суммы, но на самом деле приводят к целому новому ряду инвариантов узлов типа Джонса [42]. С помощью модели Изинга в теории фазовых переходов и теории Хилла в теории жидкостей [43] и жидких растворов были достигнуты значительные успехи во многих прикладных областях

статистической механики. Рассмотрение уравнения Замолотчикова или уравнения Замолотчикова, которое является трехмерным обобщением уравнения известное уравнение Янга-Бакстера [44], показывает, что оно обеспечивает инвариантность по отношению к движениям Рейдмейстера III, важность сохранения заряда и построения инвариантов узлов из вершинных моделей [45]. До сих пор статистическая механика и теория узлов не имели ничего общего друг с другом. Однако в процессе открытия нового полинома инвариантов для узлов, Воган Джонс установил связь между этими двумя областями. В настоящее время это исследование [46] чрезвычайно активен [47]. Но остается открытым вопрос, существуют ли инварианты Васильева, способные различать ориентированный узел из его обратного, т.е. узла с противоположной ориентацией [48]. Семейства полиномиальных инвариантов виртуальных узлов связи возникают при рассмотрении некоторых матриц размера 2×2 с элементами кватернионов [49].

В следующей работе вычисляется полином Джонса $VL(t)$ для нескольких семейств знакопеременных узлов и зацеплений, полином Тутта $T(G, x, y)$ для ассоциированных графов G , вычисляется полином Джонса для неизменного зацепления также обсуждаются [50]. Исследование связи между узлами и косами обеспечивает процесс получения узла или звена из данной косы путем «замыкания» косы, что приводит к постановке двух фундаментальных вопросов об узлах и косах [51].

Изучение сварных кос и классических узлов [52] и нового инварианта виртуальных узлов и зацеплений [53] привело к быстрому развитию теории узлов. Теория модульных мотков является следствием открытия полинома Джонса [54], что привело к тщательному анализу всех других классов 2-мостовых узлов [55]. Создание инварианта виртуальных узлов и зацеплений [56] и определение свойств бирака и биквандла, где возникают естественные инварианты из виртуальных узлов и кос [57]. Новый инвариант виртуального узла и трансцендентный функциональный инвариант объединяют несколько инвариантов полиномиального виртуального узла, таких как нулевой полином [58, 59], изгиб полинома [60] и полином аффинного индекса [61]. Это также объясняет общий метод вычисления многочлена Тутте для разбиения графа [62]. В работе вычислены точные выражения для многочленов Джонса для семейства зацеплений [63].

Согласно теории $SU(2)$ Черна-Саймонса пионерская работа Виттена [64] является одним из таких методов, в котором многочлен Джонса, расположенный в узле K [65], формируется из математического ожидания петли Вильсона $\langle W_r(K) \rangle$. Замечательным качеством этого подхода является связь между трехмерной $SU(2)$ - теорией Черна-Саймонса и двумерной $SU(2)_k$ - моделью Весса-Зумино-Виттена (WZW), где k - константа связи Черна-Саймонса, показывающая степень модели WZW . Например, коэффициент деформации $q = \exp(2\pi/k + 2)$ для группы $SU(2)$ [66]. Алгебра Темперли-Либа и алгебра Бирмана-Мураками-Вензля (BMW) сыграли основную роль в решении моделей

и теории узлов [67]. В работе особо отмечены наиболее важные и известные классические результаты Ф.Ву, а также описаны некоторые его недавние исследования о связи решеточных статистико-механических моделей с глубокими задачами чистой математики [68].

Описание веса Больцмана и определение $SO(N)$ для любой N спин-вершинной модели алгебры [27] послужил открытию новых задач в области статистической физики. Представления группы кос, полученные из рациональной конформной теории поля, могут быть использованы для получения явных представлений алгебр Темперли-Либа-Джонса [69]. Было обнаружено, что соотношение Янга-Бакстера обеспечивает как алгебраический, так и графический метод в теории узлов [70]. Универсальные R - матрицы, построенные с помощью генераторов J^\pm, J_z матриц $U_q(SU(2))$ подчиняются определяющим соотношениям групп кос. Следовательно, эти универсальные R - матрицы являются представлениями групп кос. Точно решаемые модели статистической механики [71] отличаются от метода построения представления группы кос. Вершинные модели N - состояний являются одной из таких статистико-механических моделей с больцмановскими весами $(R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u)$, связанными с каждой вершиной на квадратной решетке, в зависимости от спинов $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$, расположенных на четырех ребрах, пересекающих вершину, где спин $n = (N-1)/2$. Уравнения Янга-Бакстера подчиняются спектральным параметрам u , зависящим от веса Больцмана $(R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u)$ этих вершинных моделей. На самом деле уравнение Янга-Бакстера в пределе $u \rightarrow \infty$ сводится к определению косы групповые соотношения путем применения оператора перестановки \hat{P} к больцмановским весам. Это означает, что генераторы косы пропорциональны $\hat{P}[(R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow \infty)]$. Веса Больцмана для новых вершинных моделей, в которых ребра несут состояния со спином $j > 3/2$ [34], дают нам новые представления матриц кос, продуктивные для построения новых инварианты узла с помощью алгебраического выражения $\alpha_{\substack{j, j, \dots, j \\ n}}(A)$ [72-77].

Например, взаимодействие между двумя кварками и глюоном задается скобкой Ли между их образующими с соответствующей фейнмановской вершиной. В результате получения восьмивершинной модели с помощью алгебры Грассмана, ряд решений уравнения Замолотчикова задается как достаточное условие перестановки матриц перехода на простой квадратной решетке [78]. В пятнадцативершинной модели, удовлетворяющей правилу льда, для решения уравнения Янга-Бакстера используется алгебро - дифференциальный метод [79], где матричные элементы также зависят от спектрального параметра. 32 - вершинная модель свободных фермионов, демонстрирующая поведение Изинга, также может иметь различные переходы [80]. В работе рассматривается семейство разрешимых решеточных моделей $A-D-E$, демонстрирующих переходы порядок - беспорядок, а также различные классы универсальности критического поведения [81].

Модель Эшкина-Теллера представляет собой две модели Изинга (s и σ) - модели. Впоследствии модель Эшкина-Теллера на квадратной решетке привлекла внимание физиков. Позже оказалось, что оно конформно-инвариантно. Тесная связь модели Эшкина-Теллера на квадратной решетке изучалась с моделями статистической механики, такими как модель Поттса, восьмивершинная модель с двумя подрешетками является частным случаем шестивершинной модели [82]. Используя метод диагонализации с известными весами Больцмана для 15 - вершинной модели, 32 - вершинной модели и модели Эшкина-Теллера на квадратной решетки можно получить диагональные матричные элементы $\lambda_j(j_1, j_2, j_3; u)$ в зависимости от спектрального параметра.

Метод получения инвариантов связан с разноцветными связями [83], со статистической суммой Черна-Саймонса [36] и с получением топологического решения $SU(2)$ теории Черна-Саймонса на S^3 [84]. Трехмерная $SU(2)$ - теория Черна-Саймонса изучалась как топологическая теория поля для теоретико-полевого описания узлов и зацеплений в трех измерениях [38]. Таким образом, можно использовать теорию кос для изучения теории узлов и наоборот [85]. Затем была изучена связь между инвариантом теории узлов и новой десятивершинной моделью статистической механики с использованием перехода коммутирующей трансфер-матрицы, включающей больцмановские веса, в матрицу кос [86].

В [87] исследована тесная связь теории узлов с вершинными моделями с использованием абстрактной алгебры в структуре интегрируемых вершинных моделях. Точно решаемые вершинные модели важны в статистической физики, конформной теории поля и фазовых переходов [88]. Эти модели также связаны с областями математики и имеют важное значение в таких предметах, как тождества Роджерса Рамануджана, теория узлов и алгебра. Особый интерес как в математике, так и в физике представляет лежащая в основе алгебраическая структура разрешимых решетчатых моделей. Общая идея состоит в том, что алгебра зависит только от числа блоков, которое является степенью полиномиального уравнения, которому подчиняются больцмановские веса, и является общей для всех моделей, независимо от деталей модели. Исследование этой структуры в работах [89, 90], основываясь на первые результаты работы [18]. Для двух блоков хорошо известно, что они описываются алгеброй Темплерли-Либа или, что-то же самое, алгеброй Гекке. Здесь изучается случаи с тремя и четырьмя блоками. Исследование основывается на анзаце бакстеризации [18]. Используя этот анзац и уравнение Янга-Бакстера (УЯБ), показаны, что случай трех блоков подчиняется слабой версии алгебры Бирмана-Мураками-Вензля (BMW) [91, 92]. Для случая четырех блоков находим с помощью анзаца алгебру, которую мы называем 4 - Conformal Braiding (конформное плетение). Эта алгебра включает в себя алгебру (BMW) с другим отношением скейна, а также с одним дополнительным соотношением.

В работе [93] показана, что знаменитая шестивершинная модель статистической механики (вместе с ее многоуровневыми обобщениями) может быть переформулирована как модель типа Изинга только с двухспиновым

взаимодействием. Такая переформулировка раскрывает замечательные свойства факторизации. Возможность изинговской формулировки этих моделей вызывает вопросы о приоритете традиционного квантового группового описания вершинных моделей. Действительно, роль первичного условия интегрируемости теперь играет соотношение звезда - треугольник, которое не совсем естественно в стандартной квантовой группе, но подразумевает уравнение Янга-Бакстера вершинного типа и коммутативность трансфер - матриц как простые следствия. Как математическое тождество, возникающее соотношение звезда-треугольник эквивалентно формуле суммирования Пфаффа-Заальшютца-Джексона, первоначально открытой Дж. Ф. Пфаффом в 1797 г. Вероятно, все вершинные модели, связанные с квантованными аффинными алгебрами Ли и супералгебрами, можно переформулировать как - типовые модели.

Также в работе [94] алгебра Онзагера является одним из краеугольных камней точно решаемых моделей в статистической механике. Начиная с обобщенной алгебры Клиффорда, продемонстрирована ее связь с графовой алгеброй Темперли-Либа и обобщением алгебры Онзагера. Представлены ряд моделей квантовых решеток как представления обобщенной алгебры Клиффорда, обладающие структурой специального типа обобщенной алгебры Онзагера. Показана интегрируемость этих моделей по аналогии со свободной фермионной восьмивершинной моделью. Далее в работе [95] описывается правило кос в треугольнике, где каждая ветвь состоит из решетки мод Майораны, перекрывающихся на конечном расстоянии. Обнаружено, что энергетическое расщепление между основным состоянием и состоянием с наименьшей энергией экспоненциально уменьшается с увеличением числа мод Майораны, если система находится в своем топологическом нетривиальном режиме. Этот результат не зависит от конкретной геометрии плетения и деталей схемы плетения, а является следствием суперсимметрии и нетривиальной топологии эффективного низкоэнергетического гамильтониана, описывающего майорановскую решетку.

В [96] исследовано соответствие между интегрируемыми решеточными моделями статистической механики и дискретными интегрируемыми уравнениями, которые удовлетворяют многомерной согласованности, где последние могут быть найдены в квазиклассическом расширении первых. Эта работа расширяет это соответствие моделям взаимодействия вокруг грани (IRF), что привело к новой формулировке условия интегрируемости согласованности вокруг куба (consistency-around-a-cube (CAC)), применимого к пятиточечным уравнениям в квадратной решетке. Из квазиклассического предела моделей IRF, которые строятся из непрерывных спиновых решений отношений звезда-треугольник, связанных со списком Адлера-Бобенко-Суриса (ABC), получают пятнадцать наборов уравнений, которые удовлетворяют согласованности вокруг гранецентрированного куба (consistency-around-a-face-centered-cube (CAFCC)).

В работе [97] рассмотрена завязанная узлом петля из проволоки с равномерно распределенным на ней зарядом, где доказано, что электрическое поле вокруг такой петли имеет как минимум $2t+1$ точку равновесия, где t -

топологический инвариант, известный как туннельное число узла. Численно показана гипотезы для минимального числа точек равновесия вокруг каждого типа узлов с пятью или менее пересечениями. Визуализированы эквипотенциальные поверхности заряженных узлов. Это первые шаги в изучении «электростатической теории узлов».

В конце XX века в математической теории узлов и зацеплений произошло бурное развитие – открытие новых инвариантов узлов [98-100] и их связь с моделями статистической механики [101, 102]. Изученная связь со статистической механикой позволила дать простую и прямую формулировку инвариантов узлов, что является давней фундаментальной проблемой в теории узлов [103]. Хотя инварианты узлов теперь можно анализировать с помощью групп кос и понимать в рамках квантовых групп [104, 105], исследования методами статистической механики остаются простыми и элементарными.

Хотя основы данного направления теоретической физики заложены более 20 лет назад развитие направления исследования продолжается и углубляется, это можно видеть по работам, представленным в зарубежных журналах. К примеру, как в работе [106] исследованы хорошо известные инварианты узлов, где рассмотрены неэквивалентные узлы, имеющие одни и те же полиномы. В этом смысле эти хорошо известные полиномиальные инварианты не дают один в один отображения на неэквивалентные узлы. Эта актуальная «проблема классификации узлов», которая требует радикального подхода. В работе [107] рассмотрено построение представлений генераторов групп кос из вершинных моделей N – состояний обеспечивающих отличный способ изучения инвариантов узлов и зацеплений. Используя такое представление группы кос, была выдвинута алгебраическая формула для инвариантов зацепления, когда один и тот же спин $\frac{(N-1)}{2}$ размещен на всех узлах компонента. В работе изучены разноцветные инварианты зацеплений, где узлы-компоненты несут разные спины. Показана формула инварианта разноцветных зацеплений в терминах генераторов кос, полученных из R - матриц двухчастичных вершинных моделей. Также в работе [108] получены для класса многопараметрических статистических моделей на основе матриц кос $N^2 \times N^2$ собственные значения матрицы переноса $T^{(r)}$ для всех (r, N) . Для всех N получены обратные преобразования Кэли для матрицы Янга-Бакстера, соответствующие матрицам кос, которые обеспечивают потенциалы для разложимых S - матриц.

В последующей работе [109] изучены решения уравнения Янга-Бакстера, связанные с девятнадцатью вершинными моделями, определен вид алгебраических кривых, ограничивающих соответствующие больцмановские веса и выявлено, что они обладают универсальной структурой. Также в [110] изучена связь статсуммы модели Поттса с полиномом Тутте, в работе [111] охарактеризованы инварианты виртуальных зацеплений, которые являются статистической суммой вершинных моделей (также они были рассмотрены Лагарпом и Джонсом), как в реальном, так и в комплексном случае, в [112] получена восьмивершинная модель статистической механики над алгеброй

Грассмана с применением 3-симплексного уравнения Янга-Бакстера. В работе [113] методом параметризации построена трансфер-матрица больцмановских весов десятивершинной модели, используя операторы квантовой матрицы монодромии, вычислены собственное состояние и собственное значение трансфер-матрицы.

В работе [114] выяснено, что обмен одинаковыми частицами – это простой математический метод, который учитывает наличие двух классов частиц в нашем трехмерном мире, а именно, бозоны и фермионы. Фактически вышеприведенная теория подтверждает экспериментальное наблюдение того, что система идентичных атомов гелия He^3 ведет себя иначе, чем система идентичных атомов He^4 (изотоп) в процессе рассеяния.

В [115] использованы теоретико-скейновые методы для классификации всех полиномов виртуальных узлов и трехвалентных инвариантов графов с определенными условиями малости. В первой половине работы классифицируются все многочлены виртуальных узлов, дающие нетривиальные инварианты, строго меньшие, чем инварианты, заданные спиновой моделью Хигмана-Симса. В частности, показано семейство теорий скейнов, происходящих из $Re p(O(2))$ с интересным сплетением. Во второй половине разделены все нетривиальные инварианты трехвалентных графов, происходящих из симметричных трехвалентных категорий, где в свою очередь из классифицированных категорий сплетается подкатегория, порожденная только трехвалентной вершиной.

В данной работе расширено определение кнотид, введенный Тураевым, к мультилинкоидам, состоящим из ряда узловых и нотоидных компонентов. Изучены инварианты мультилинкоидов, лежащих на замкнутой ориентируемой поверхности, а именно скобочный полином и скейн-модуль Кауффмана, упорядоченный скобочный полином и Т-инвариант по отношению к обобщенным Θ - графам [116].

Эта работа призвана пролить свет на природу полинома Джонса и его влияние на математику. Работа написана в форме личной одиссеи и с намерением показать различные математические темы, возникающие в связи с полиномом Джонса. Этот инвариант можно интерпретировать применительно к комбинаторной топологии, статистической механике, алгебрам Ли, алгебрам Хопфа, квантовой теории поля, теории категорий и многому другому. В каждом случае инвариант Джонса выступает в качестве ключевого примера закономерностей и связей этих математических и физических контекстов. Удивительно, до какой степени открытие Воганом Джонсом своего многочлена затронуло так много математики, физики, естественных наук и так много наших математических жизней [117].

Актуальность темы исследования.

Связь теории узлов и статистической механики стала популярной после того, как ученые выдвинули возможность завязывания воды в узлы вихревых потоков, которое имеет место в реальных физических объектах. Данная находка

позволяет изучить модельную систему, что позволяет детально изучить независимое разрешение узлов в реальных физических процессах.

Актуальность диссертации состоит в том, что основные проблемы теории узлов остаются открытыми: попытки строгой классификации узлов все еще не решены, и еще неизвестно, имеют ли они вычислимо полную систему инвариантов; узлы используются как в чистой математике, так и в реальных физических, химических и биологических процессах и объектах.

Необходимость изучения связи теории узлов и моделей статистической механики:

Во-первых, статистическая сумма зависит лишь от суммы по всем возможным состояниям энергетической функции спиновой модели. Это значит, что каждое состояние определяет спины всех вершин графа и тем самым энергию взаимодействий между ними. Чтобы вычислить статистическую сумму, нужно приписать каждому ребру графа экспоненту от энергии взаимодействия вершин, соединённых этим ребром. Этот процесс затем повторяется для всех возможных состояний.

Во-вторых, энергетические функции моделей, удовлетворяющих соотношениям звезда-треугольник (и другим соотношениям, соответствующим другим ходам Рейдемейстера), дадут статистические суммы, также являющиеся инвариантами зацепления.

Существующие алгебраические структуры разрешимых решетчатых моделей, переформулированные как модель типа Изинга только с двухспиновым взаимодействием, недостаточно позволяют определить полный список инвариантов узла.

Начало развитию теории узлов положил великий английский физик Дж. Максвелл полагая, что волны взаимодействуют электромагнитным образом, а затем выдвинул еще более смелую идею: взаимодействующие частицы сами по себе являются волнами; но поскольку частицы (атомы) такие маленькие, а волны такие длинные, волновые атомы должны быть ограничены небольшой областью пространства: они представляют собой закодированные узлы, в которых хранится вся физическая и химическая информация о природе решетки атома. Данная теория требует решения ряда проблем связи спиновых моделей типа льда статистической механики с инвариантами узлов через теорию кос и конформной теории поля Весса-Зумино.

Таким образом, исследование вышеуказанных ученых позволяет рассматривать полиномиальные инварианты теории узлов, их структуры и особое значение для топологии и их взаимосвязи с математической физикой. Взаимосвязь с физикой начинается со связи между главными моделями для многочленов узлов и статистических функций. Эта взаимосвязь приводит к построению ряда инвариантов, выходящих за рамки оригинальных полиномов узлов. Также ключевой проблемой является вопрос о разграничении новых инвариантов.

Помимо этих и многих других применений теории узлов в топологии, её приложения включают также изучение особенностей плоских алгебраических

кривых, а в многомерной ситуации - изолированных особенностей комплексных гиперповерхностей, гладкие структуры на сферах, конструирование динамических систем и слоений. Связь теории узлов и вершинных моделей статистической механики остается живой и загадочной. Основные вопросы до сегодняшнего дня открыты и наконец, считается, что ведущая роль теории узлов в статистической физике еще окончательно не определена.

Ожидаемые результаты: Будет выявлена связь между узловыми инвариантами и статистическими суммами.

Целью работы является исследование связи между инвариантами теории узлов и статистическими суммами в задачах статистической физики.

Для достижения этой цели необходимо решить **следующие задачи:**

1 Для десятивершинной модели статистической механики построить представления генераторов группы кос, ведущих к вычислению инварианта узла b_1^5 ;

2 Обобщить процедуру определения представлений генераторов группы кос из R-матрицы, связанной с трехчастичной вершинной моделью и вывести алгебраическую формулу инварианта узла.

3 Получить новые решения восьмивершинной и шестивершинной моделей статистической механики на квадратной решетке над алгеброй Грассмана с использованием уравнения Замолотчикова являющегося трехмерным обобщением известного уравнения Янга-Бакстера;

4 Провести классификацию решений уравнения Янга-Бакстера для вершинных моделей и изучить их.

5 Разработать метод, обеспечивающий общий способ построения новых интегрируемых моделей с взаимодействием ближайших соседей. На основе интегрируемости определить точное значение собственного состояния матрицы через алгебраический анзац Бете;

6 Вычислить значения элементов десятивершинной модели статистической механики с полуцелым спином. Найти собственное состояние и собственное значение трансфер - матрицы, используя уравнение Янга – Бакстера.

Объект исследования: топологическая модель теории узлов и вершинные модели статистической механики.

Предмет исследования: связь трёхмерного представления узлов в топологической модели теории узлов с элементами квантовой матрицы монодромии (уравнения Янга-Бакстера).

Методы исследования: методы статистической физики, теории узлов, теории кос и теории групп.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые разработана трехчастичная вершинная модель статистической механики и впервые вычислен инвариант узла 5_2 . Для шестивершинной и восьмивершинной моделей статистической физики получены новые решения трехмерного обобщения уравнения Янга-Бакстера. Впервые рассмотрена точно решаемая десятивершинная модель статистической механики и найден соответствующий полином узла.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. При условии фермионно-бозонного взаимодействия с применением $SU(2)$ теории Черна-Саймонса гамильтониан трехчастичной вершинной модели статистической механики выражается через полином Джонса теории узлов.

2. При периодических граничных условиях с доменными стенками генераторы, подчиняющиеся принципу исключения Паули, порождают новые решения уравнения Замолотчикова в восьмивершинной и шестивершинной интегрируемых моделях статистической механики в трехмерном пространстве.

3. В условиях асимметризации с использованием предела спектральных параметров R - матричных элементов статсумма десятивершинной модели статистической механики описывается полиномом Джонса.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в квантовой теории поля и статистической физике, например, при построении вершинных моделей для кристаллических решеток с водородными связями. Результаты работы также могут быть использованы при построении моделей кристаллов сегнетоэлектрика и антисегнетоэлектрика, для работ в области биологии и химии.

Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть применены в учебном процессе при чтении элективных курсов бакалаврам, магистрантам и докторантам специальности «Физика».

Личный вклад автора. В процессе выполнения исследований автор под руководством научных руководителей принимал непосредственное участие во всех этапах работы: провел все расчеты, лично подготовил публикации.

Достоверность результатов

Достоверность научных результатов подтверждается согласованностью разработанных теоретических моделей с результатами анализа фотометрических и спектральных данных. Полученные результаты согласуются с выводами о природе аналогичных объектов, полученными другими авторами. К текущему моменту опубликованные соискателем результаты работы процитированы в 6 независимых реферируемых публикациях.

Апробация работы

Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на:

– 8th international conference on Mathematical Modeling in Physical Science Journal of Physics: Conference Series. Eight-vertex model over Grassmann algebra. - 2019. - №1391, 012035 (IOP Publishing. doi 10.1088/1742-6596/1391/1/0120351);

– 14-й международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование – 2019». Точное решение для восьмивершинной спиновой модели (2019. - Секция 1. - С. 272-276);

– 16-й международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ - 2020». Тезисы докладов 1 часть (2020. - С. 29-30);

- Proceedings of the IV International Conference «ASTROPHYSICS, GRAVITY AND COSMOLOGY». Application Grassmann algebra for a vertex model (2019. - С. 47).

Кроме того, полученные результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры Общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, на семинарах Евразийского международного центра теоретической физики и семинарах департамента физики Калифорнийского государственного университета, Фресно.

Опубликованность результатов. По результатам диссертационной работы опубликовано 8 научных работ в казахстанских и зарубежных журналах, из них: 1 статья в зарубежном журнале с высоким импакт-фактором «Physica A: Statistical Mechanics and its Applications», входящий в базу данных Web of Science (Quartile Q2, Impact Factor 3,778) и Scopus (Percentile 93, категория Statistical and Nonlinear Physics, CiteScore 7.1); 3 статьи в периодических изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, в том числе 1 статья в цитируемом журнале в базе данных Web of Science и Scopus (Corresponing author); 1 статья в зарубежной международной конференции, входящая в базу данных Web of Science и Scopus (Corresponing author); 2 статьи и 1 тезис в материалах международных конференций (Corresponing author).

H-индекс и цитируемость работ. Докторант Касенова Т.К. имеет следующие наукометрические показатели по базе данных в Web of Science H-index - 1 (процитированы в журнале Nuclear Physics D. Авторы: V. Belavin (РФ), D. Gernert (Израиль), H. Wenzl (США)) и Scopus H-index - 1.

Связь темы диссертации с планами научных работ

Работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ по проекту – «Исследование некоторых проблем астрофизики и космологии в рамках эйнштейновской и неэйнштейновской теорий гравитации». Годы реализации проекта - 01.01.2018 - 01.01.2020. ИРН проекта BR05236277.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения и списка использованных источников из 161 наименований, содержит 94 страницы основного компьютерного текста, включая 1 рисунок и 2 таблицы.

1 УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ИНВАРИАНТАМИ ТЕОРИИ УЗЛОВ И ВЕРШИННЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В этом разделе на основе больцмановских весов удвоенной модели Изинга, параметризованной эллиптическими функциями [118], исследуется альтернативный метод проверки уравнения Янга-Бакстера при параметризации матричных элементов с помощью уравнения звезда-треугольник. Особенностью предлагаемого подхода является применение восьмивершинной модели, которая является обобщением шестивершинной модели - одной из наиболее широко изучаемых моделей в статистической физике. Следовательно, модель типа льда в теории графов можно сформулировать как задачу вычисления взвешенных ориентаций. В дополнение, введена квантовая декомпозиция восьмивершинной модели и доказан набор свойств замыкания в различных областях пространства параметров [119]. Кроме того, показано, что на четырех регулярных планарных графах существуют дополнительные свойства замыкания. Эти области пространства параметров соответствуют порогу фазового перехода. Как указано, точное решение классической двумерной восьмивершинной модели является величайшим достижением в области точно решаемых моделей, а противоречие с гипотезой универсальности и независимости критических показателей от деталей взаимодействия исследовано в начале 70-х. Решение восьмивершинной модели позволило рассчитать энергию основного состояния и найти спектр элементарных возбуждений модели XYZ. Существуют различные методы решения восьмивершинной модели, прежде всего, разделение спиновых и зарядовых степеней свободы и существование двух типов элементарных возбуждений фермиевской природы - нейтральных спинов и заряженных холонов, а также существование необычных показателей корреляционных функций. Следовательно, все эти исследования нашли место в связи восьмивершинной модели с элементами эллиптических функций и теории узлов [34].

Таким образом, получение генераторов кос из восьмивершинной модели путем параметризации матричных элементов с подходящим нормировочным коэффициентом может быть использован для квантовой формы коэффициентов Клебша-Гордана, так называемого $3j$ - символа. Решение основано на наблюдении, что строки в матрицах переноса коммутируют для конкретной параметризации четырех больцмановских весов. Параметризация матричных элементов произошла как модификация альтернативного решения для шестивершинной модели с использованием сложной версии эллиптических функций. Матричная форма генераторов кос определяется с помощью R - матрицы, что в итоге приводит к нахождению инварианта узла. Представленное решение поможет понять, как найти связь между инвариантами узлов и решетчатыми моделями статистической механики через математический аппарат квантовой физики. Более того, применение приложений R - матриц соотношения Артина позволяет выявить проблему решения теории точно решаемых моделей статистической механики и построения инвариантов узлов

квантовых матричных алгебр. Стратегия получения многочлена узла с использованием параметризованной восьмивершинной модели статистической механики ясно показывает, что статистическая сумма идентична для решетки, построенной из узла 10_{136} .

В первой главе рассматривается:

- построение матриц кос из $R(u)$ - матриц восьмивершинных моделей для одних и тех же спинов и вывод алгебраической формулы для инварианта узла;
- представлен подход десятивершинной модели к построению представлений генераторов группы кос, ведущий к вычислению инварианта узла b_1^5 ;
- разработана трехчастичная вершинная модель статистической механики с применением фермионных и бозонных моделей и вычислен инвариант спинового узла, пропорциональный разноцветному полиному Джонса в рамках пространства $SU(2)$ теории Черна-Саймонса статистической физики.

1.1 Параметризованная 8-вершинная модель

Параметризованная восьмивершинная модель является обобщением шестивершинной модели, в которой спины $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ размещаются на четырех ребрах, пересекающих каждую вершину. Больцмановские веса $(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)$ матриц связаны с каждой ненулевой вершиной, если только $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$, где $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Это условие допускает 8 ненулевых элементов, которое обуславливает параметризованную восьмивершинную модель.

$$(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0) = \begin{bmatrix} (R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} & \uparrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow & \operatorname{snh}(\mu - u) & 0 & 0 & k \operatorname{snh} \mu \operatorname{snh} u \operatorname{snh}(\mu - u) \\ \downarrow\uparrow & 0 & \operatorname{snh} u & \operatorname{snh} \mu & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \operatorname{snh} \mu & \operatorname{snh} u & 0 \\ \downarrow\downarrow & k \operatorname{snh} \mu \operatorname{snh} u \operatorname{snh}(\mu - u) & 0 & 0 & \operatorname{snh}(\mu - u) \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Для построения b_i генераторов кос возьмем предел $u \rightarrow 0$ и разделим элементы предыдущей матрицы на вес Больцмана $(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{\uparrow, \uparrow}(u \rightarrow 0)$. Впоследствии мы выберем подходящую нормализацию, чтобы матричные элементы были конечными, как показано ниже.

$$\frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{\uparrow, \uparrow}(u \rightarrow 0)} = \begin{bmatrix} (R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} & \uparrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow & 1 & 0 & 0 & k \operatorname{snh} \mu \operatorname{snh} u \\ \downarrow\uparrow & 0 & \frac{\operatorname{snh} u}{\operatorname{snh}(\mu - u)} & \frac{\operatorname{snh} \mu}{\operatorname{snh}(\mu - u)} & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \frac{\operatorname{snh} \mu}{\operatorname{snh}(\mu - u)} & \frac{\operatorname{snh} u}{\operatorname{snh}(\mu - u)} & 0 \\ \downarrow\downarrow & k \operatorname{snh} \mu \operatorname{snh} u & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Из конформной теории поля Весса-Зумино следует компактное соотношение для генераторов кос b_i , полученных из $(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}$ - матрицы вершинных моделей, а также из собственных значений λ матрицы монодромии в $SU(2)_k$ [120], где значениями матрицы перестановок $(\hat{R}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} = \frac{1}{\aleph} \hat{P}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} (R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} (u \rightarrow 0)$ являются фактор нормализации $\aleph = (R^{j_1, j_2})_{j_1, j_2}^{j_1, j_2} (u \rightarrow 0)$.

$$(\hat{R}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} = \frac{1}{\aleph} \hat{P}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} (R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} (u \rightarrow 0) = \frac{1}{\aleph} \hat{P}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \sum_{J \in j_1 \otimes j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix} \lambda_J(j_1, j_2) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ n_1 & n_2 & M \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где $M = m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ и элементы в скобках $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix}$ обозначают квантовую форму формулы для коэффициента Клебша-Гордана (q -CG) [121]. Элементы матрицы могут быть расширены таким образом

$$\frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} (u \rightarrow 0)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{\uparrow, \uparrow} (u \rightarrow 0)} = \begin{bmatrix} (R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} & \uparrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow & 1 & 0 & 0 & ksnh\mu snhu \\ \downarrow\uparrow & 0 & \frac{snh\mu}{snh(\mu-u)} & \frac{snhu}{snh(\mu-u)} & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \frac{snhu}{snh(\mu-u)} & \frac{snh\mu}{snh(\mu-u)} & 0 \\ \downarrow\downarrow & ksnh\mu snhu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Следовательно, можно определить матричную форму $b_i \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ генераторов кос, используя R - матрицу. Таким образом, мы вычисляем инвариант узла по формуле (1.5):

$$\alpha_{\underbrace{j, j, \dots, j}_n}(A) = (\tau_j \bar{\tau}_j)^n \left(\frac{\tau_j}{\bar{\tau}_j} \right)^{\frac{l}{2}} Tr[HA], \quad (1.5)$$

где l - сумма показателей экспонент b_i , входящих в косу A , $H = \underbrace{h_j \otimes h_j \dots h_j}_r$ где r

$$h_j = \frac{1}{1+q+\dots+q^{2j}} \text{Diag}[1, q, \dots, q^{2j}], \quad (1.6)$$

и $\tau_j, \bar{\tau}_j$ являются

$$\tau_j = \frac{1}{1+q+\dots+q^{2j}}, \quad \bar{\tau}_j = \frac{1}{1+q+\dots+q^{2j}}. \quad (1.7)$$

Изначально имеется только одна образующая кос b_i , для всех кос $A \in B_2$, матричная форма которой будет иметь вид 4×4 , где матричные элементы выражаются эллиптическими функциями с комплексным вариантом:

$$b_i = (R^{\frac{1}{2}})^{n_1, n_2}_{m_1, m_2}. \quad (1.8)$$

Инвариант в уравнении (1.5) для узла 10_{136} будет построен по таблице Рольфсена. Для узлов и зацеплений, полученных замыканием косы $A = b_{136}^{10}$, являющихся матрицами 4×4

$$b_1 = (R^{\frac{1}{2}})^{n_1, n_2}_{m_1, m_2} \times \mathfrak{I}, \quad (1.9)$$

$$b_2 = \mathfrak{I} \times (R^{\frac{1}{2}})^{n_1, n_2}_{m_1, m_2}. \quad (1.10)$$

Например, узел 10_{136} - это коса $A = b_{136}^{10}$. Важно, что такое действие группы косы на косу из пяти нитей влечет за собой следующий порядок матричной операции над начальным состоянием $|j, m_1; j_2, m_2\rangle$

$$A|4\text{-коса}\rangle \equiv b_{136}^{10} |j, m_1; j_2, m_2\rangle. \quad (1.11)$$

Из вышеизложенного следует, что получение собственного значения, зависящего от спектральных параметров $\lambda_j(j_1, j_2; u)$, ибо такой спин $j_1 = j_2 = 1/2$ принадлежит параметризованной восьмивершинной модели на квадратной решетке. Это предположение $\lambda_j(j_1, j_2; u)$ было сформулировано в [122]

$$\lambda_j(j_1, j_2; u) = \prod_{k_1=1}^J (\sinh(k_1 \mu - u)) \prod_{k_2=J+1}^{2J} (\sinh(k_2 \mu + u)), \quad (1.12)$$

соответственно, собственные значения матричных элементов являются эллиптическими функциями комплексной версии

$$\lambda_0(u) = \sinh(\mu + u), \quad \lambda_1(u) = \sinh(\mu - u). \quad (1.13)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &= \lambda_1(0) = \sinh \mu \equiv B(\mu), \\ \lambda_0(u)\lambda_0(-u) &= \lambda_1(u)\lambda_1(-u) = \chi_1(u)\chi_1(-u) + \chi_4(u)\chi_4(-u) = \chi_3(u)\chi_3(-u) + \chi_2(u)\chi_2(-u) = \\ &= \chi_2(u)\chi_2(-u) + \chi'_3(u)\chi'_3(-u) = \sinh(\mu + u)\sinh(\mu - u) \equiv A(\mu; u) \end{aligned}$$

в результате получаются матрицы в зависимости от спектрального параметра, где $(R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)$ - матрицы, связанные с новыми вершинными моделями

$$(R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u) = \sum_{J \in j \otimes j} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix} \chi_J(j_1, j_2) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ n_1 & n_2 & M \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

и общий вид R - матрицы будет

$$(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u) = \begin{bmatrix} m_1, m_2 / n_1, n_2 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \chi_1(u) & 0 & 0 & \chi_4(u) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 0 & \chi_2(u) & \chi_3(u) & 0 \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & 0 & \chi_3(u) & \chi_2(u) & 0 \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & \chi_4(u) & 0 & 0 & \chi_1(u) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{-i}{[2]} \left(\frac{sn(i\mu)cn(iu)dn(iu) + sn(iu)cn(i\mu)dn(i\mu)}{1 - msn^2(i\mu)sn^2(iu)} \right), \\ \chi_2 &= \frac{-i}{[2]} \left(\frac{sn^2(i\mu)cn^2(iu)dn^2(iu) + sn(iu)cn^2(i\mu)dn^2(i\mu)}{1 - msn^2(i\mu)sn^2(iu)} \right), \\ \chi_3 &= -isn(i\mu)e^{-u}, \quad \chi_4 = 0, \quad \chi_3' = -isn(i\mu)e^u. \end{aligned}$$

Замена $u = 0$ и $q = e^{2\mu}$ для $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, есть

$$\frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{\uparrow, \uparrow}(u \rightarrow 0)} = \begin{bmatrix} m_1, m_2 / n_1, n_2 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 0 & \frac{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) + 1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) + 1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Чтобы получить генераторы кос $b\left(j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2}\right)$, выберем соответствующую матрицу перестановок. Для $b\left(j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2}\right)$, может быть

$$\hat{P}^{\wedge j_1=\frac{1}{2}, j_2=\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Применим эту матрицу перестановок при построении генератора кос

$$\left(\hat{R}^{\wedge j_1, j_2} \right)_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} = \left(\hat{P}^{\wedge j_1, j_2} \right)_{m_1, m_2}^{m_1, m_2} \lim_{u \rightarrow 0} = \frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{m_1, m_2}(u \rightarrow 0)}, \quad (1.18)$$

в результате чего получаем явный вид $\hat{R}^{\wedge j_1=\frac{1}{2}, j_2=\frac{1}{2}}$ - матрицы для параметризованной восьмивершинной модели

$$\frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{n_1, n_2}(u \rightarrow 0)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{\uparrow, \uparrow}^{m_1, m_2}(u \rightarrow 0)} = \begin{bmatrix} m_1, m_2 / n_1, n_2 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) + 1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} & 0 & \frac{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) + 1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Аналогичной конструкцией $\hat{R}^{\wedge \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ для $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ является транспонированная матрица $\hat{R}^{\wedge \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$. Явный вид единичной матрицы можно записать как

$$\hat{R}^{\wedge j_1, j_2} \left[\hat{R}^{\wedge j_1, j_2} \right]^{-1} = \hat{R}^{\wedge j_1, j_2} \left[\left[\hat{R}^{\wedge j_2, j_1} \right]^T \right]^{-1} = \mathfrak{I}, \quad (1.20)$$

$$\hat{R}^{\wedge j_1, j_3} \left[\hat{R}^{\wedge j_1, j_3} \right]^{-1} = \hat{R}^{\wedge j_1, j_3} \left[\left[\hat{R}^{\wedge j_3, j_1} \right]^T \right]^{-1} = \mathfrak{I}, \quad (1.21)$$

$$\hat{R}^{\wedge j_2, j_3} \left[\hat{R}^{\wedge j_2, j_3} \right]^{-1} = \hat{R}^{\wedge j_2, j_3} \left[\left[\hat{R}^{\wedge j_3, j_2} \right]^T \right]^{-1} = \mathfrak{I}. \quad (1.22)$$

Таким образом, мы имеем возможность представлять матричные формы $b_i[j_1, j_2]$ группойдов, удовлетворяющие конструкциям генераторов кос

$$b_i[j_1, j_2][b_i^{\wedge j_1, j_2}][b_i^{\wedge j_1, j_2}]^{-1} \mathfrak{I}, \quad (1.23)$$

$$b_i[j_2, j_1][b_i^{\wedge j_2, j_1}][b_i^{\wedge j_2, j_1}]^{-1} \mathfrak{I}, \quad (1.24)$$

в этой форме

$$b_i[j_1, j_2] \underbrace{\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S}}_{i-1} \times \left(R^{\wedge_{j_1, j_2}} \right)^{-1} \times \mathfrak{S}_{i+2}, \quad (1.25)$$

$$b_i[j_2, j_1] \underbrace{\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S}}_{i-1} \times \left(R^{\wedge_{j_2, j_1}} \right)^{-1} \times \mathfrak{S}_{i+2}. \quad (1.26)$$

В результате, используя матричное представление, для любого косы A , замыкание которого даст многокомпонентные связи в узле. Аналогично формуле инварианта зацепления приведем следующую формулу (1.5) для фермионного инварианта зацепления, в котором компоненты $\alpha_{j_1, j_2}^{\approx}(A)$ узла имеют одинаковые спины. Инвариант разноцветного узла (с точностью до общего коэффициента деформации $q^{\frac{1}{2}}$) для четырехкомпонентного звена, где компоненты узла имеют одинаковые спины, полученного замыканием любого r - двунитевой косы узла 10_{136} , определяется формулой A

$$\alpha_{j_1, j_2}[A(10_{136})] = q^{\frac{1}{2}c} \alpha_{j_1, j_2}^{\approx}(A) = q^{\frac{1}{2}c} \prod (\tau_j \overline{\tau_j})^{\frac{l_j}{2}} Tr\{HA\}, \quad (1.27)$$

где первый фактор выводит коэффициент обусловленности из q с целым числом q , которое зависит от вращений, изгиба и числа между составляющими узлами зацепления; l_i - количество нитей в образующей косы, т.е. при вращении спина j_i в косе из прядей A , где $\sum_{i=1}^n l_i = r$. Кроме того, матричное представление зависит от порядка таких повторяющихся спинов, возникающих в H косе из r - нитей. В данной диссертации описывается коса из 5 - прядей, полученная из узла 10_{136} , с переплетением j на всех пряди, что подразумевает

$$H = h_{j_1} \otimes h_{j_2}. \quad (1.28)$$

Возвращаясь к матричным операциям для косы A , воспользуемся формулой (1.11), следуя последовательности замыкания каждого звена в косе, где каждая нить имеет одинаковые спины, упомянутые выше. Из приведенного выше определения, h_{j_i} (1.6), τ_{j_i} и $\overline{\tau_{j_i}}$ (1.7). В следующем разделе мы подробно рассчитаем инвариант узла 10_{136} с таким же звеном.

1.1.1 Инвариант узла пятипрядной косы

На этом этапе работы мы найдем инвариант узла с зацеплениями со спинами $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, для этого сначала нужно написать для косы n - нитей, которая отслеживает спины. Для узла 10_{136} , состоящего из зацеплений,

полученных замыканием пятипрядной косы, матричное представление выглядит так

$$A(10_{136}) = b_3 b_3^{-1} b_4 b_5^{-1} b_2^{-1} b_5 b_2 b_4 b_1 b_2, \quad (1.29)$$

и $H = h_{\frac{1}{2}} \otimes h_{\frac{1}{2}}$ даст

$$\alpha_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[A(10_{136})] = \frac{k\delta\eta^{\frac{5}{2}}}{\psi}, \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} k &= q^2, \\ \eta &= ((1 + q + q^2 + q^3)(1 + q + q^2 + q^3)), \\ \psi &= ((-1 + q)^8 (1 + q)^2 (1 + q)^2), \\ \delta &= 256 - 2048q + 6928q^2 - 96q^{\frac{5}{2}} - 12176q^3 + 320q^{\frac{7}{2}} + 10352q^4 - 472q^{\frac{9}{2}} + 596q^5 + \\ &+ 464q^{\frac{11}{2}} - 5429q^6 - 464q^{\frac{13}{2}} - 596q^7 + 472q^{\frac{15}{2}} + 10352q^8 - 320q^{\frac{17}{2}} - 12176q^9 + \\ &+ 96q^{\frac{19}{2}} + 6928q^{10} - 2048q^{11} + 256q^{12} \end{aligned}$$

что согласуется с полиномом Джонса, рассчитанным на основе $SU(2)$ теории Черна-Саймонса, генераторов кос и фермионной параметризованной восьмивершинной модели.

1.2 Трехчастичная вершинная модель и инвариант узла

Согласно результатам, полученным в предыдущем параграфе вершинная модель с двумя одинаковыми спинами, позволяет построить представление генераторов группы кос и вычислить инвариант узла модели с разноцветными спинами.

Попытка получить модифицированное алгебраическое выражение для инварианта узла α в терминах матричных представлений матриц кос была названа разноцветными инвариантами узлов и зацеплений, где j_1, j_2, \dots - спиновые состояния, расположенные в разных составных зацеплениях узла. Математическое решение узлового полинома с использованием этих матриц кос изучалось в публикациях для спина $j = 1/2, j = 1, j = 3/2$, которые в источниках встречаются как 6-вершинная, 19-вершинная и 44-вершинная модели [74, 75, 79, 123]. Числа 6, 19, 44 обозначают количество ненулевых больцмановских весов для соответствующей вершинной модели с N - состояниями. Для трех спинов j_1, j_2, j_3 генераторы кос строятся таким образом

$$B_j \begin{bmatrix} \hat{j}_1 & \hat{j}_2 & \hat{j}_3 & \cdots & \hat{j}_{12} \\ \hat{j}_1^* & \hat{j}_2^* & \hat{j}_3^* & \cdots & \hat{j}_{23}^* \end{bmatrix}_{(p,r)(p',r')(p,s)(p',s')(r,s)(r',s')} = \lambda_{p_j}(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3) \delta_{(p)(p')} \delta_{(r)(r')} \delta_{(s)(s')}, \quad (1.31)$$

$j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

$$v_\beta \begin{bmatrix} \hat{j}_1 & \hat{j}_2 & \hat{j}_3 & \cdots & \hat{j}_{12} & \hat{j}_2 & \hat{j}_1 \\ \hat{l}_1^* & \hat{l}_2^* & \hat{l}_3^* & \cdots & \hat{l}_{23}^* & \hat{l}_3^* & \hat{l}_2^* & \hat{l}_1^* \end{bmatrix} \left\langle \sum_{(p,r)} |\phi_{(p,r)}^{(1)}\rangle \beta | \phi_{(p',r')}^{(2)}\rangle \sum_{(r,s)} |\phi_{(r,s)}^{(1)}\rangle \beta | \phi_{(r',s')}^{(3)}\rangle \sum_{(p,s)} |\phi_{(p,s)}^{(2)}\rangle \beta | \phi_{(p',s')}^{(3)}\rangle \right\rangle, \quad (1.32)$$

$$v_\beta(\hat{j}_1 \hat{j}_1^* \hat{j}_2 \hat{j}_2^* \hat{j}_3 \hat{j}_3^* \cdots \hat{j}_{12} \hat{j}_{23}^*) = \sum_{(p,s)} |N_{(p,s)}\rangle(\hat{j}_1 \hat{j}_1^* \hat{j}_2 \hat{j}_2^* \hat{j}_3 \hat{j}_3^* \cdots \hat{j}_{12} \hat{j}_{23}^*), \quad (1.33)$$

$$\aleph = (R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}. \quad (1.34)$$

Здесь спиновые состояния j расположены на всех нитях косы, а n обозначает количество узловых компонент зацепления, полученного в результате замыкания косы A . Нам нужно отобразить эти матрицы косы в матрицы монодромии в модели WZW . Плетеные генераторы должны быть получены из $(R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u)$ - матриц новых вершинных моделей. Мы называем такие вершинные модели трехчастичными вершинными моделями, в которых каждая прядь имеет $m_1, n_1 \in j_1, j_1 - 1, \dots, -j_1$, $m_2, n_2 \in j_2, j_2 - 1, \dots, -j_2$, $m_3, n_3 \in j_3, j_3 - 1, \dots, -j_3$, где собственные значения

$$\lambda_0(0) = \lambda_{\frac{1}{2}}(0) = \lambda_1(0) = \lambda_{\frac{3}{2}}(0) = \text{Sin} \mu \equiv \beta(\mu), \quad (1.35)$$

следовательно

$$\lambda_0(u) \lambda_0(-u) = \lambda_{\frac{1}{2}}(u) \lambda_{\frac{1}{2}}(-u) = \lambda_1(u) \lambda_1(-u) = \lambda_{\frac{3}{2}}(u) \lambda_{\frac{3}{2}}(-u) = \text{Sinh}(\mu + u) \text{Sinh}(2\mu + u) + \text{Sinh}(\mu + u) \text{Sinh}(2\mu - u) + \text{Sinh}(\mu - u) \text{Sinh}(2\mu + u) + \text{Sinh}(\mu - u) \text{Sinh}(2\mu - u). \quad (1.36)$$

Процедура получения весов Больцмана вершинной модели $(R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u)$ из зависимых от спектральных параметров элементов диагональной косы $\lambda_j(j_1, j_2, j_3)$ может быть обобщена для получения трехчастичных вершинных моделей больцмановских весов $(R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u)$, где каждая нить несет разные спины j_1, j_2, j_3 . Таким образом,

$$\hat{R}(0) = \beta(\mu) \wp, \quad \hat{R}(u) \hat{R}(-u) = A(\mu; u) \wp. \quad (1.37)$$

Важно подчеркнуть, что соотношения квазигрупп [38] для генераторов кос $\hat{P}[(R^{j_1 \cdot j_2 \cdot j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u \rightarrow \infty)]$ были получены из больцмановских весов в пределе $u \rightarrow \infty$ с помощью оператора перестановки \hat{P} . Примером этому может послужить графический метод расчета, в основе которых лежат коэффициенты Клебша-Гордана и матрицы преобразования [124]. Используя квантово-деформированные коэффициенты Клебша-Гордана q -CG, эти матрицы кос $\hat{P}[(R^{j \cdot j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u \rightarrow \infty)]$ можно диагонализировать [125], диагональные элементы которого $\lambda_j(j, j)$ являются собственными значениями матриц монодромии в модели WZW.

Нашей основной целью в этом параграфе является построение представлений кос $(R^{j_1 \cdot j_2 \cdot j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u)$, которые подчиняются свойствам квазигрупп [85,74] из различных спиновых j - состояний на нитях. Выбранный метод базируется на выводе матричной формы трехчастичной вершинной модели из больцмановских весов, позволяющий использовать модифицированную формулу для узла произвольной косы A и эффективно вычислить инвариант разноцветного узла $\alpha_{\underbrace{j, j, \dots, j}_n}(A)$.

1.2.1 Вершинная модель и R - матрица

В этом разделе мы кратко рассмотрим подход десятивершинной модели к построению представлений группы кос генераторы, ведущие к вычислению b_1^5 инвариант узла.

N - вершинные модели рассматривают двумерную модель статистической механики с состояниями одного и того же спина j , расположенных на четырех ребрах, пересекающихся каждую вершину, как показано на рисунок 1.

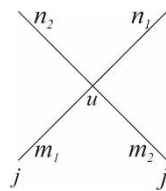


Рисунок 1 – Вершинная модель $(R^{j \cdot j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u)$

Данная точно решаемая модель статистической механики показывает, что спектральный параметр u напрямую зависит от больцмановских весов $(R^{j \cdot j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u)$ и согласуется с уравнением Янга-Бакстера

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, m_3} (R^{j \cdot j})_{m_1, m_2}^{m_1, m_2}(u) (R^{j \cdot j})_{m_1, m_3}^{m_1, m_3}(u+v) (R^{j \cdot j})_{m_2, m_3}^{m_2, m_3}(v) = \\ = \sum_{m_1, m_2, m_3} (R^{j \cdot j})_{m_2, m_3}^{m_2, m_3}(v) (R^{j \cdot j})_{m_1, m_3}^{m_1, m_3}(u+v) (R^{j \cdot j})_{m_1, m_2}^{m_1, m_2}(u). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Параметризированный вид этой R -матрицы зависит от спектрального параметра u и параметр деформации $q = e^{2u}$ приведен в [88] для 6, 9, 44 - вершинных моделей. Указанное выше уравнение в пределе $u \rightarrow 0$ дополняя произведением R - матричных элементов на оператор перестановки \hat{P} (до полной нормализации), показывает явное соотношение группы кос B_r , где генераторы b_i ($i = 1, 2, \dots, r$) имеют следующее представление

$$b_i[j, j] = \underbrace{1 \times 1_2 \times \dots \times 1}_{i-1} \times (\hat{R}^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} \times 1_{i+2} \dots, \quad b_i[j, j]^{-1} = \underbrace{1_1 \times 1_2 \times \dots \times 1}_{i-1} \times ((\hat{R}^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2})^{-1} \times 1_{i+2} \dots \quad (1.39)$$

Здесь

$$((\hat{R}^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}) = \frac{1}{N} \hat{P}((R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2})(u \rightarrow \infty), \quad (1.40)$$

коэффициент нормализации $N = (R^{j,j})_{j,j}^{j,j}(u \rightarrow \infty)$ гарантирует, что все матричные элементы в пределе $u \rightarrow \infty$. В результате имеем новое представление косы R - матрицы вершинной модели, что приводит к новым инвариантам узла или зацепления. Математическая форма $\alpha_{\underbrace{j, j, \dots, j}_n}(A)$ [74] помогает вычислить инвариант любого n - компонентного зацепления в узле, полученном замыканием косы $A \in B_r$, с таким же спином j в других многокомпонентных узлах

$$\alpha_{\underbrace{j, j, \dots, j}_n}(A) = (\tau_j \bar{\tau}_j)^{-n/2} \left(\frac{\bar{\tau}_j}{\tau_j} \right)^{e/2} Tr[HA], \quad (1.41)$$

где e сумма показателей степени b_i появления в косе A

$$H = \underbrace{h_j \otimes h_j \dots h_j}_r$$

где

$$h_j = \frac{1}{1+q+\dots+q^{2j}} \text{Diag}[1, q, \dots, q^{2j}], \quad (1.42)$$

τ_j и $\bar{\tau}_j$ будут равны

$$\tau_j = \frac{1}{1+q+\dots+q^{2j}}; \quad \bar{\tau}_j = \frac{q^{2j}}{1+q+\dots+q^{2j}}. \quad (1.43)$$

При выполнении марковских движений на косе указанный выше инвариант $\alpha_{\underbrace{j, j, \dots, j}_n}(A)$ с переменной q остается неизменным, и для тривиального

узла косы A имеет вид $\alpha_j(b_1) = \sum_{i=-j}^j q^i$. В источниках по теории узлов этот инвариант известен как ненормированные инварианты узлов.

В следующем подразделе мы кратко изучим вычисление инварианта узла с помощью матриц кос, полученных из R - матриц новой модели с 10 вершинами.

1.2.2 Десятивершинная модель

Новая вершинная модель представляет собой десятивершинную модель, в которой спины $j = 1/2$ расположены на четырех ребрах, пересекающих каждую вершину. Таким образом, веса Больцмана $(R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u)$, связанные с каждой вершиной, отличны от нуля тогда и только тогда $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$, когда $m_1, m_2, n_1, n_2 \in (-1/2, 1/2)$. Это условие допускает десять ненулевых весов Больцмана, что приводит к модели с вершинами. В матричной форме элементы

$$R_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} = \begin{pmatrix} R_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} & \uparrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow & \sinh(\lambda - u) & \sinh 2\lambda \sinh u & 0 & 0 & \sinh(\lambda) \sinh(u - \lambda) \\ \downarrow\uparrow & \sinh(\lambda + u) & \sinh \lambda & \sinh \lambda & 0 & \\ \uparrow\downarrow & 0 & \sinh \lambda & \sinh(\lambda + u) & \sinh(\lambda + u) & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \sinh \lambda & \sinh(\lambda + u) & \sinh(\lambda + u) & 0 \\ \downarrow\downarrow & \sinh(\lambda) \sinh(u - \lambda) & 0 & 0 & \sinh 2\lambda \sinh u & \sinh(\lambda - u) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Для построения генераторов кос b_i возьмем спектральный параметр, учитываемый $u \rightarrow \infty$ указанными матричными элементами, и заменим $e^{2\lambda}$ на переменную q . Сравните с соответствующей нормировкой так, чтобы матричные элементы были конечными в $u \rightarrow \infty$ этом пределе, как показано ниже

$$\frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{n_1, n_2}_{m_1, m_2}(u \rightarrow \infty)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{\uparrow, \uparrow}_{\uparrow, \uparrow}(u \rightarrow \infty)} = \begin{pmatrix} R_{m_1, m_2}^{n_1, n_2} & \uparrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow & 1 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q + q^{\frac{3}{2}}}) & 0 & 0 & \frac{-1 + q}{2\sqrt{q}} \\ \downarrow\uparrow & 0 & 0 & \sqrt{q} & \sqrt{q} & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \sqrt{q} & -1 + q & -1 + q & 0 \\ \uparrow\downarrow & 0 & \sqrt{q} & -1 + q & -1 + q & 0 \\ \downarrow\downarrow & \frac{-1 + q}{2\sqrt{q}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q + q^{\frac{3}{2}}}) & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Применение матрицы перестановок

$$\hat{P}^{1/2,1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

элементы $(\hat{R}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}$ (1.33) оказываются

$$(\hat{R}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})_{m_1,m_2}^{n_1,n_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^{\frac{3}{2}}}) & 0 & 0 & \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} \\ 0 & \sqrt{q} & 0 & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & -1+q & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & -1+q & -1+q & -1+q & 0 \\ \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^{\frac{3}{2}}}) & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Таким образом, можно вычислить матричную форму генераторов кос $b_i[1/2,1/2]$ (1.32), используя \hat{R} - матрицу. По формуле (1.34) можно вычислить инвариант для некоторого узла с зацеплениями. Имейте в виду, что существует только один генератор кос b_1 для всех кос $A \in B_2$, чья матричная форма будет 5×5 . Это,

$$b_1 = (R^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}. \quad (1.48)$$

Уравнение (1.34) показывает готовый инвариант для зацеплений бесконечной группы узлов, трилистников и Хопфа с использованием кос $A = b_1, b_1^3$ и b_1^2 соответственно [76]. Для узлов и зацеплений, возникающих в результате замыкания кос $A \in B_3$, существуют два генератора кос b_1, b_2 , которые являются матрицами 10×10

$$b_1 = R^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{m_1,m_2}^{n_1,n_2} \times I, \quad (1.49)$$

$$b_2 = I \times R^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}. \quad (1.50)$$

Например, узел b_1 , в котором есть коса $A = b_1 b_2^{-1} b_3 b_4^2 b_3^{-1} b_4^{-1}$. Следует знать, что такое действие косы на косу из 3 - прядей подразумевает следующий порядок работы матрицы над начальным состоянием $|j, m_1; j, m_2; j, m_3\rangle$

$$A | 3- \text{рядей} \rangle \equiv b_2 [b_1^{-1} \{b_2(b_1^{-1} | j, m_1; j, m_2; j, m_3) \rangle\}] \quad (1.51)$$

Обобщенный способ решения косы для любой косы $A \in B_n$ приводит к вычислению полиномиальных инвариантов в формуле (1.34). Этот полином подобен полиному Джонса, хотя метод включает только матричное произведение. Метод очень эффективен при получении полиномиальных инвариантов для любого узла или звена из вершинной модели, элементы R -матрицы которой известны. В источниках по теории узлов разноцветные многочлены Джонса соответствуют размещению высших спинов $j \geq 1$ на компонентах узла. Интересно, что эти полиномы для $j = 1, 3/2$ согласуются с инвариантами узлов и зацеплений $\alpha_{\underline{j, \dots, j}}(A)$ в формуле (1.34), где матричное представление генераторов кос b_i получается из больцмановских весов 19-вершинной и 44-вершинной моделей. Конформная симметрия нарушается на квантовом уровне следовыми и конформными аномалиями, которые нарушают инвариантность относительно конформных для генераторов кос b_i , полученных из матричных элементов вершинной модели, а также из собственных значений (λ) матрицы монодромии в $SU(2)_k$ [126]:

$$\begin{aligned} \hat{R}^{j,j}_{m_1, m_2}{}^{n_1, n_2} &= \frac{1}{N} \hat{P}^{j,j} (R^{j,j})_{m_1, m_2}{}^{n_1, n_2} (u \rightarrow \infty) = \\ &= \frac{1}{N} \hat{P}^{j,j} \sum_{J \in j \otimes j} \begin{pmatrix} j & j & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix} \lambda_j(j, j) \begin{pmatrix} j & j & J \\ n_1 & n_2 & M \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где $M = m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ и в скобках $\begin{pmatrix} j & j & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix}$ обозначена квантовая форма формулы для коэффициента Клебша-Гордона (q -CG) [67]. Кроме того, суммирование $J \in j \otimes j$ принадлежит диапазону $\{0, 1, \dots, 2j\}$. Суть основной задачи состоит в том, чтобы получить собственные значения $\lambda_j(j, j; u)$ зависимости от спектрального параметра для любого спина j соотношения в уравнении. (1.45) дает значение $R^{j,j}(u)$ - матриц, где матричные элементы со спинами $j_1 = 1/2, j_2 = 1, j_3 = 1/2$ принадлежат таким моделям, как 15-вершинной модели, 32-вершинной модели и изотропной модели Эшкина-Теллера на квадратной решетке. Это предположение $\lambda_j(j, j; u)$ сформулировано в [126]

$$\lambda_j(j, j; u) = \prod_{k_1=1}^j (\sinh(k_1 \mu - u)) \prod_{k_2=j+1}^{2j} (\sinh(k_2 \mu + u)), \quad (1.53)$$

в результате получают матрицы в зависимости от спектрального параметра, где $(R^{j,j})_{m_1, m_2}{}^{n_1, n_2}(u)$ - матрицы, связанные с новыми вершинными моделями:

$$(R^{j,j})_{m_1, m_2}^{n_1, n_2}(u) = \sum_{J \in j \otimes j} \begin{pmatrix} j & j & J \\ m_2 & m_1 & M \end{pmatrix} \lambda_J(j, j) \begin{pmatrix} j & j & J \\ n_1 & n_2 & M \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Здесь $SU(2)$ спин $J \in j \otimes j \equiv 0, 1, 2, \dots, 2j$ (допускаются неприводимые представления в тензорном произведении). Мы проверили для некоторых значений спина j , что эти R -матрицы, полученные из предполагаемого вида в формуле (1.46), подчиняются уравнению Янга-Бакстера и, следовательно, являются допустимыми весами Больцмана для совершенно новых вершинных моделей. Первоначально мы проанализировали вычисление инварианта узла и зацепления из вершинных моделей с ребрами, несущими состояния с одинаковым спином j .

Таким образом, можно увидеть определенную связь между R -матрицей со спектральным параметром, который зависит от собственного значения $\lambda_J(j, j; u)$ матрицы вершинной модели. Примечательно, что предполагаемое собственное значение в уравнении (1.46) может быть обобщено на $\lambda_J(j_1, j_2, j_3; u)$, где $J \in j_1 \otimes j_2 \otimes j_3 \equiv |j_1 - j_2 - j_3|, |j_1 - j_2 - j_3| + 1, \dots, j_1 + j_2 + j_3$, что приведет к вершинной модели с соседними ребрами, имеющими состояния с разными спинами $j_1 \neq j_2$, но $j_1 = j_3$. Эти вершинные модели следует называть трехчастичными вершинными моделями. В следующем разделе мы опишем трехчастичную вершинную модель и предложим новое алгебраическое выражение для разноцветного инварианта узла с зацеплениями из ассоциированных весов Больцмана.

Эта глава посвящена рассмотрению построения представления генераторов групп кос из вершинных моделей с $\frac{(N-1)}{2}$ - состояниями, что дает отличный способ изучения инварианта узла. Предложена алгебраическая формула для инварианта узла, когда на всех компонентах узла расположены разные спины. В работе обобщена процедура вывода представлений генератора кос из трехчастичной вершинной модели. Это представление позволило изучить инвариант узла с разноцветными звеньями, где компоненты узла имеют разные спины. Формула инварианта узла с разноцветным звеном изучается с точки зрения генераторов кос, полученных из R -матриц трехчастичных вершинных моделей. Полученный инвариант узла 5_2 соответствует полиному Джонса и обобщенному многочлену Джонса $HOMFLY - PT$.

1.3 Трехчастичная вершинная модель

В данном подразделе исследуется новая вершинная модель с разными спинами на соседних ребрах решетки, которая называется «трехчастичной вершинной моделью». Собственное значение в формуле (1.46) как для одинаковых спинов, так и для разноцветных спинов $\lambda(j_1, j_2, j_3; u)$ имеет вид [124]

$$\begin{aligned} \lambda_J(j_1, j_2, j_3; u) &= \prod_{k_1=j_2-j_3+1}^J \sinh(k_1 \mu - u) \prod_{k_2=J+1}^{|j_1-j_3|} \sinh(k_2 \mu - u) + \\ &+ \prod_{k_3=|j_2+j_3|+1}^J \sinh(k_3 \mu + u) \prod_{k_3=J+1}^{|j_1-j_2|} \sinh(k_4 \mu + u) \end{aligned} \quad (1.55)$$

где элементы $J \in j_1 \times j_2 \times j_3$, соответствующие R - матрице, в зависимости от спектрального параметра (аналогично уравнению (1.47)) принимают вид:

$$\begin{aligned} (R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u) &= \\ &= \sum_{j_{12}, m_{12}} \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ -m_2 & -m_1 & M_{12} \end{Bmatrix} \lambda_{J_{12}}(j_1, j_2; u) \begin{Bmatrix} j_1 & j & J_{12} \\ n_1 & n_2 & n_{12} \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{j_{23}, m_{23}} \begin{Bmatrix} J_{123} & j_1 & j_{23} \\ -m_{123} & m_1 & m_{23} \end{Bmatrix} \lambda_{J_{23}}(j_1, J_{123}; u) \begin{Bmatrix} j_1 & J_{123} & j_{23} \\ n_1 & -n_{123} & n_{23} \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{j_{23}, m_{23}} \begin{Bmatrix} j_{23} & j_3 & J_{23} \\ m_{23} & -m_3 & -m_{23} \end{Bmatrix} \lambda_{J_{23}}(j_3, j_2; u) \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ n_3 & n_2 & -n_{23} \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{j_{12}, m_{12}} \begin{Bmatrix} J_{123} & j_3 & j_{12} \\ m_{123} & -m_3 & -m_{12} \end{Bmatrix} \lambda_{J_{12}}(J_{123}, j_3; u) \begin{Bmatrix} j_3 & J_{123} & j_{12} \\ -n_3 & n_{123} & -n_{12} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ранее упоминалось о R - матрице, удовлетворяющей следующему уравнению Янга-Бакстера [88; 126]

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, m_3} (R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{m'_1, m'_2, m'_3}(u) (R^{j_1, j_3})_{m_1, m_3}^{m''_1, m''_3}(u+v) (R^{j_2, j_3})_{m_2, m_3}^{m''_2, m''_3}(v) = \\ = (R^{j_2, j_3})_{m_2, m_3}^{m'_2, m'_3}(v) (R^{j_1, j_3})_{m_1, m_3}^{m'_1, m'_3}(u+v) (R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{m'_1, m'_2}(u). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Исследование и вычисление предполагаемой формы R - матрицы (1.49) для спинов j_1, j_2, j_3 полностью удовлетворяет приведенному выше уравнению Янга-Бакстера. Начиная с предела $u, v, u+v \rightarrow \infty$ $(R^{j_1, j_2})_{m_1, m_2}^{m'_1, m'_2}(u)$ и подходящей нормировки $\aleph = (R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3} = (u \rightarrow \infty)$ получаем матричные элементы, не зависящие от спектрального параметра. Умножая соответствующую перестановку \hat{P}^{j_1, j_2, j_3} на R - матрицу, получаем

$$(\hat{R}^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{N} (\hat{P}^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{m'_1, m'_2, m'_3} (R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3} (u \rightarrow \infty), \quad (1.58)$$

расчет генераторов кос $b(j_1, j_2, j_3)$, где замыкание каждого звена в узле происходит на трех нитях с представлениями j_1, j_2, j_3

$$b(j_1, j_2, j_3) | j_1, j_2, j_3 \rangle \infty | j_3, j_2, j_1 \rangle. \quad (1.59)$$

Произвольное сплетенное слово, использующее эти генераторы, должно отслеживать спины j_1, j_2, \dots, j_n n - прядей. Совокупность таких кос фактически образует квазигруппы [124].

Кроме того, замыкание требует, чтобы начальное состояние $|j_1, j_2, \dots, j_n\rangle$ оставалось таким же, как конечное состояние после процедуры плетения слов. Например, закрытие косы приведет к тому, что разные компоненты узла и зацеплений будут иметь разные представления. Используя матричную форму генераторов кос $b(j_1, j_2), b(j_1, j_3) \dots$, полученных из трехчастичных вершинных моделей, мы выявляем инвариант разноцветных зацеплений для компонент узла, имеющих разные представления. В следующем разделе, вводя явные формы больцмановских весов, можно выполнить $R^{j_1=1/2, j_2=1, j_3=1/2}$ последовательное вычисление инварианта узла.

1.3.1 R - матрица для разных спинов

Для расчета инварианта узла с ним критически важно определить матрицу $(R^{j_1, j_2, j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}$ для различных спинов j_1, j_2, j_3 . В качестве примера возьмем $R^{j_1=1/2, j_2=1, j_3=1/2}$, где собственные значения (1.48) в зависимости от спектрального параметра равны

$$\lambda_0(u) = \sinh(\mu + u),$$

$$\lambda_{\frac{1}{2}}(u) = \sinh\left(\frac{3\mu}{2} + u\right),$$

$$\lambda_1(u) = \sinh(\mu - u),$$

$$\lambda_{\frac{3}{2}}(u) = \sinh\left(\frac{3\mu}{2} - u\right), \quad (1.60)$$

$$\lambda_0(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{u+\mu}}{2}\right) \left(\frac{e^{u+2\mu}}{2}\right) = \frac{e^{2u}}{2^2} e^{3\mu} = \left\{ \left(\frac{e^{2u}}{4}\right) q^{\frac{3}{2}} \right\} (1), \quad (1.61)$$

$$\lambda_{\frac{1}{2}}(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{u+\mu}}{2}\right) \left(\frac{-e^{u-2\mu}}{2}\right) = \frac{e^{2u}}{2^2} (-e^{-\mu}) = \left\{ \left(\frac{e^{2u}}{4}\right) q^{\frac{3}{2}} \right\} (-q^{-1}), \quad (1.62)$$

$$\lambda_1(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{u-\mu}}{2}\right) \left(\frac{e^{u+2\mu}}{2}\right) = \frac{e^{2u}}{2^2} (-e^{\mu}) = \left\{ \left(\frac{e^{2u}}{4}\right) q^{\frac{3}{2}} \right\} (-q^2), \quad (1.63)$$

$$\lambda_{\frac{3}{2}}(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{u-\mu}}{2}\right)\left(\frac{-e^{u-2\mu}}{2}\right) = \frac{e^{2u}}{2^2}(-e^{-\mu}) = \left\{\left(\frac{e^{2u}}{4}\right)q^{\frac{3}{2}}\right\}(-q^{-1}), \quad (1.64)$$

Собственные значения кос для трех нитей, несущих спины $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$, их представление $SU(2)$ в теории Черна-Саймонса имеют вид

$$\lambda_1^B : (-)^l q^{\frac{-l(l+1)}{2}}, \quad (1.65)$$

$$\lambda_0^B : 1, \lambda_{1/2}^B : -q^{-1}, \lambda_1^B : -q^2, \lambda_{\frac{3}{2}}^B : q^{-1}. \quad (1.66)$$

Здесь $\lambda_l(u)$ пропорциональны λ_l^B узлам $u \rightarrow \infty$

$$M = m_1 + m_2 = n_1 + n_2 \quad (1.67)$$

и общий вид R - матрицы будет

$$(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u) = \begin{pmatrix} m_1, m_2/n_1, n_2 & \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \\ & \chi_1(u) & & & & & & & & \\ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & 0 & \chi_1(u) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} & & 0 & \chi_2(u) & 0 & \chi_3(u) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & & 0 & 0 & \chi_2(u) & 0 & \chi_5(u) & 0 & \chi_6(u) & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & & 0 & \chi_3(u) & 0 & \chi_4(u) & 0 & 0 & 0 & \chi_6(u) \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & & 0 & 0 & \chi_5(u) & 0 & \chi_4(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_4(u) & 0 & \chi_5(u) \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & & 0 & 0 & \chi_6(u) & 0 & 0 & 0 & \chi_4(u) & 0 \\ 0 & & & & & & & & & \\ -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & & 0 & 0 & 0 & \chi_6(u) & 0 & \chi_5(u) & 0 & \chi_2(u) \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_3(u) & 0 \\ \chi_2(u) & 0 & & & & & & & & \\ -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1(u) & & & & & & & & \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

где

$$\chi_1 = 2 \sinh\left(\frac{3\mu}{2} - u\right) + \sinh(\mu - u), \chi_2 = \cosh 2\mu - \sinh u,$$

$$\chi_3 = (\sinh 2\mu \sinh \mu)^{\frac{1}{2}} e^{-u}, \chi_4 = 2 \sinh\left(\frac{\mu}{2} - u\right) + \sinh(\mu - u),$$

$$\chi_5 = -\sinh 2\mu (\sinh 3\mu)^{\frac{1}{2}} \sinh\left(\frac{3\mu}{2} + u\right) - \sinh u,$$

$$\chi_6 = \sinh 2\mu (\sinh \mu)^{\frac{1}{2}} e^u - (\sinh 3\mu)^{\frac{1}{2}} \sinh\left(\frac{3\mu}{2}\right),$$

$$\chi_3' = (\sinh 2\mu \sinh \mu)^{\frac{1}{2}} e^u, \chi_5' = \sinh 2\mu (\sinh 3\mu)^{\frac{1}{2}} \sinh\left(\frac{3\mu}{2} + u\right) + \sinh u,$$

$$\chi_6' = \sinh 2\mu (\sinh \mu)^{\frac{1}{2}} e^{-u} + (\sinh 3\mu)^{\frac{1}{2}} \sinh\left(\frac{3\mu}{2}\right). \quad (1.69)$$

Замена $u \rightarrow \infty$ и $q = e^{2\mu}$ for $j_1 = 1/2, j_2 = 1, j_3 = 1/2$, имеется

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{n_1, n_2, n_3}(u)}{(R^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u)} =$$

$$= \begin{pmatrix}
m_1, m_2/n_1, n_2 & \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} & & & & & & & & \\
\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} & 0 & \frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{q^{\frac{3}{4}} - q^{-\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} & 0 & -q - q^{-1} & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & 0 & \frac{q^{\frac{3}{4}} - q^{-\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & -q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 & -q - q^{-1} \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} & 0 & q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}} & 0 & q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \\
0 & 0 & & & & & & & \\
-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & -q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}} & 0 \\
-\frac{q^{\frac{3}{4}} - q^{-\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & & & & & & & \\
-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & -q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} & 0 & \frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\
0 & 0 & & & & & & & \\
-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^{\frac{3}{4}} - q^{-\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 \\
\frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} & 0 & & & & & & & \\
-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & & & & & & &
\end{pmatrix} \quad (1.70)$$

Для получения генераторов кос $b(j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = 1, j_3 = \frac{1}{2})$ выбирают соответствующую перестановку $\hat{P}^{j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = 1, j_3 = \frac{1}{2}}$ так, чтобы последовательность спинов, указанная в строке и столбце выше в $R^{j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = 1, j_3 = \frac{1}{2}}$ - матрице, осталась неизменной. Для $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = 1, j_3 = \frac{1}{2}$, $\hat{P}^{j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = 1, j_3 = \frac{1}{2}}$ может быть

$$\hat{P}^{j_1=\frac{1}{2}, j_2=1, j_3=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Применим эту матрицу перестановок при построении генератора кос

$$(\hat{R}^{j_1 \cdot j_2 \cdot j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3} = (\hat{P}^{j_1 \cdot j_2 \cdot j_3})_{m_1, m_2, m_3}^{m'_1, m'_2, m'_3} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(R^{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3}(u)}{(R^{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}})_{m'_1, m'_2, m'_3}^{m_1, m_2, m_3}(u)}, \quad (1.72)$$

в результате чего получаем явную форму $\hat{R}^{j_1=\frac{1}{2}, j_2=1, j_3=\frac{1}{2}}$ - матрицу трехчастичной вершинной модели

$$\begin{aligned}
& (\hat{R}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_{m_1, m_2, m_3}^{n_1, n_2, n_3} = \\
& \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & -\frac{1}{q} - q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{q} + q & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{3}{4}}} + q^{\frac{3}{4}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{3}{4}}} + q^{\frac{3}{4}} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 \\
0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{3}{4}}} + q^{\frac{3}{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{q^{\frac{3}{4}}} + q^{\frac{3}{4}} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} - q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} - q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{q} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} + q & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q} & 0 & \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix}
-\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{q^{\frac{3}{4}}} + q^{\frac{3}{4}} & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} - q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} - q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} + q & 0 & -\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q} & 0 & \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} + q^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \quad (1.73)
\end{aligned}$$

Аналогичная конструкция $\hat{R}^{\frac{1}{2}, 1}$ для $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$ транспонированной матрицы $\hat{R}^{1, \frac{1}{2}}$. Явный вид единичной матрицы можно записать как

$$\hat{R}^{j_1, j_2} [\hat{R}^{j_1, j_2}]^{-1} = \hat{R}^{j_1, j_2} [[\hat{R}^{j_2, j_1}]^u]^{-1} = 1, \quad (1.74)$$

$$\hat{R}^{j_1, j_3} [\hat{R}^{j_1, j_3}]^{-1} = \hat{R}^{j_1, j_3} \left[[\hat{R}^{j_3, j_1}]^u \right]^{-1} = I, \quad (1.75)$$

$$\hat{R}^{j_2, j_3} [\hat{R}^{j_2, j_3}]^{-1} = \hat{R}^{j_2, j_3} \left[[\hat{R}^{j_3, j_2}]^u \right]^{-1} = I. \quad (1.76)$$

Таким образом, мы имеем возможность представлять матричные формы $b_i[j_1, j_2, j_3]$ группоидов, удовлетворяющих конструкциям генераторов кос

$$b_i[j_1, j_2] [b_i^{j_1, j_2}] ([b_i^{j_2, j_1}]^{-1})^{-1}, \quad (1.77)$$

$$b_i[j_1, j_3] [b_i^{j_1, j_3}] ([b_i^{j_3, j_1}]^{-1})^{-1}, \quad (1.78)$$

$$b_i[j_2, j_3] [b_i^{j_2, j_3}] ([b_i^{j_3, j_2}]^{-1})^{-1}, \quad (1.79)$$

в этой форме

$$b_i[j_1, j_2] = \underbrace{I \times I \times \dots \times I}_{i-1} (\hat{R}^{j_1, j_2})^{-1} \times I_{i+2}, \quad (1.80)$$

$$b_i[j_1, j_3] = \underbrace{I \times I \times \dots \times I}_{i-1} (\hat{R}^{j_3, j_1})^{-1} \times I_{i+2}, \quad (1.81)$$

$$b_i[j_2, j_3] = \underbrace{I \times I \times \dots \times I}_{i-1} (\hat{R}^{j_3, j_2})^{-1} \times I_{i+2}. \quad (1.82)$$

В результате, используя матричное представление, для любого косы A , замыкание которого даст многокомпонентные связи в узле. Аналогично формуле для инварианта узла (1.27) приведем следующую формулу для инварианта разноцветного узла, в котором компоненты узла имеют разные спины. Инвариант разноцветного узла $\tilde{\alpha}_{j_1, j_2, j_3}(A)$ (с точностью до полного коэффициента деформации $q^{1/2}$) для шестикомпонентного звена, где компоненты узла имеют разные спины, полученный замыканием любой r - косы CollapseBraid A задается формулой (1.83):

$$\alpha_{j_1, j_2, j_3}[A(CB)] = q^{\frac{1}{2}C} \tilde{\alpha}_{j_1, j_2, j_3}(A) = q^{\frac{1}{2}C} \prod_{i=1}^n (\tau_{j_i} \overline{\tau_{j_i}})^{-\frac{l_i}{2}} Tr\{HA\}, \quad (1.83)$$

где первый множитель получается из коэффициента деформации q с целым числом C , которое зависит от вращений, изгиба и числа между составляющими узлами зацеплений;

l_i - это число прядей в генераторе косы, то есть, когда спин j_i находится в косе A из r - прядей, где $\sum_{i=1}^n l_i = r$. Кроме того, матричное представление H зависит от порядка таких повторяющихся спинов, возникающих в косе из r -

нитей. В данной главе описывается трехнитевая коса, полученная из узла 5_2 , с плетением j_1 на первой пряди, на второй $j_2 \neq j_1$ и на третьей пряди j_3 , что подразумевает

$$H = h_{j_1} \otimes h_{j_2} \otimes h_{j_3}. \quad (1.84)$$

Возвращаясь к матричным операциям для косы A , воспользуемся формулой (1.14), следуя последовательности замыкания каждого звена косы, где каждая нить имеет те же самые спины, о которых говорилось выше. Из приведенного выше h_{j_i} определения τ_{j_i} и $\bar{\tau}_{j_i}$ (1.7), как обсуждалось в разделе 2. В следующем разделе мы подробно рассчитаем инвариант разноцветного узла связи 5_2 .

1.3.2 Инварианты разноцветных узлов

В этом разделе работы мы найдем инвариант узла с зацеплениями со спинами $j_1 = j_3 = \frac{1}{2}$ и $j_2 = 1$, для этого сначала нужно написать косы из n - прядей, которое отслеживает спины. Для узла 5_2 CollapseBraid [BR] Knot, состоящего из простых зацеплений, полученных замыканием трехпрядной косы, матричное представление выглядит так Multi-colored knot invariants

$$\begin{aligned} A([BR]Knot5_2) &= b_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)b_2\left(1, \frac{1}{2}\right)b_3^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_3^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_2^{-1}\left(1, \frac{1}{2}\right), \\ A([BR]Knot5_2) &= b_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)b_2\left(1, \frac{1}{2}\right)b_3^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_2^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_3^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right)b_2^{-1}\left(1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.85)$$

и $H = h_{\frac{1}{2}} \otimes h_1 \otimes h_{\frac{1}{2}}$ даст нам

$$\alpha_{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}}[A(5_2)] = \frac{\kappa \delta \eta^{\frac{3}{2}}}{\psi}, \quad (1.86)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{q}, \\ \eta &= \left(\frac{(1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6+q^9+q^{11}+q^{13})(1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6+q^9+q^{11}+q^{13})}{q^{13}} \right), \\ \psi &= ((1+\sqrt{q})^5 q^{\frac{5}{2}} (1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6+q^9+q^{11}+q^{13})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta = & 1 - q^{\frac{1}{4}} + 3\sqrt{q} - 4q^{\frac{3}{4}} + 2q - 2q^{\frac{5}{4}} - 7q^{\frac{3}{2}} + 15q^{\frac{7}{4}} - 13q^2 + 40q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{5}{2}} + 52q^{\frac{11}{4}} + \\
& + 32q^3 + 44q^{\frac{13}{4}} + 76q^{\frac{7}{2}} + 40q^{\frac{15}{4}} + 150q^4 + 55q^{\frac{17}{4}} + 238q^{\frac{9}{2}} + 48q^{\frac{19}{4}} + 289q^5 - 15q^{\frac{21}{4}} + \\
& + 276q^{\frac{11}{2}} - 104q^{\frac{23}{4}} + 192q^6 - 142q^{\frac{25}{4}} + 27q^{\frac{13}{2}} - 75q^{\frac{27}{4}} - 174q^7 + 88q^{\frac{29}{4}} - 328q^{\frac{15}{2}} + \\
& + q312q^{\frac{31}{4}} - 335q^8 + 466q^{\frac{33}{4}} - 241q^{\frac{17}{2}} + 422q^{\frac{35}{4}} - 167q^9 + 223q^{\frac{37}{4}} - 80q^{\frac{19}{2}} + 37q^{\frac{39}{4}} + \\
& + 22q^{10} - 40q^{\frac{41}{4}} + 18q^{\frac{21}{2}} - 34q^{\frac{43}{4}} - 119q^{11} + 30q^{\frac{45}{4}} - 253q^{\frac{23}{2}} + 151q^{\frac{47}{4}} - 304q^{12} + \\
& + 264q^{\frac{49}{4}} - 292q^{\frac{25}{2}} + 262q^{\frac{51}{4}} - 231q^{13} + 137q^{\frac{53}{4}} - 133q^{\frac{27}{2}} + 2q^{\frac{55}{4}} - 4q^{14} - 30q^{\frac{57}{4}} + , \\
& + 105q^{\frac{29}{2}} + 46q^{\frac{59}{4}} + 130q^{15} + 136q^{\frac{61}{4}} + 95q^{\frac{31}{2}} + 148q^{\frac{63}{4}} + 47q^{16} + 84q^{\frac{65}{4}} + 9q^{\frac{32}{2}} + \\
& + 9q^{\frac{67}{4}} - 14q^{17} - 21q^{\frac{69}{4}} - 21q^{\frac{35}{2}} - 5q^{\frac{71}{4}} - 15q^{18} + 10q^{\frac{73}{4}} - 6q^{\frac{37}{2}} + 8q^{\frac{75}{4}} - q^{19} + 2q^{\frac{74}{4}}
\end{aligned}$$

что согласуется с разноцветным полиномом Джонса, рассчитанным на основе теории Черна-Саймонса с точностью $SU(2)$ до полного множителя.

Выводы по первому разделу:

– в первом подразделе получена абсолютно новая R - матрица двухчастичной параметризованной восьмивершинной модели с идентичными связями. Индекс пряди меньше ширины ее минимальной косы из представлений группы кос для единственного узла 10_{136} в таблице узлов Рольфсена. Кроме того, R - матрицы, определенные на косах и построенные по теореме Маркова и движениям Рейдмейстера, получены с точными результатами для новой параметризованной восьмивершинной модели;

– во втором подразделе исследована десятивершинная модель, которая строится как модифицированное расширение интегрируемой восьмивершинной модели и в трехмерном позиционном пространстве элементарные частицы фермионным переходом являются одномерными представлениями группы перестановок, действующих на пространство волновых функций. В результате было обнаружено, что инвариант узла пропорционален двухчастичному многочлену Джонса, где используется групповое представление $SU(2)$, имеющее спины j_1, j_2 состояний на ребрах, пересекающих вершину. В заключение описывается процесс нахождения инварианта узла, который используется для нахождения статистической суммы ранее известной восьмивершинной модели;

– в третьем подразделе исследована и получена новая R - матрица трехчастичной вершинной модели узла 5_2 с разноцветными зацеплениями из представлений группы кос, полученных алгоритмом Фогеля. При этом соседние ребра узлов несут разные спины. Этот инвариант пропорционален разноцветному полиному Джонса. Вместо $SU(2)$ использовалось представление группы $SO(N)$, имеющее спиновые состояния j_1, j_2, j_3 на ребрах, пересекающих вершину. Изложенный в диссертации процесс нахождения инварианта узла должен быть обобщаемым для группы $SO(N)$ и порождать, в свою очередь, новые

вершинные модели и их инварианты. В дальнейшем можно будет найти такие типы вершинных моделей и решения их инвариантов узлов с разными связями. Найденный инвариант можно сравнить с полиномом (*HOMFLY – PT*), указанным в литературе.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРШИННЫХ МОДЕЛЕЙ ЧЕРЕЗ АЛГЕБРУ ГРАССМАНА

Данный раздел диссертации посвящен рассмотрению восьмивершинной и шестивершинной моделей на квадратной решетке над грассмановой алгеброй с использованием уравнения Замолодчикова, или уравнения А.Б. Замолодчикова, которое является трехмерным обобщением известного уравнения Янга-Бакстера. Проведем небольшой исторический обзор. А.Б. Замолодчиковым было исследовано перестановочность матриц перехода для статистической модели на кубической решетке со спиновыми переменными на гранях и с больцмановскими весами, равными элементами его S - матрицы. Бажановым было доказано, что элементы S - матрицы Замолодчикова действительно удовлетворяют уравнению Замолодчикова. Чуть позже в работе [127] Бажанов и Строганов изучили несколько версий уравнения Замолодчикова для статистических моделей с разными типами взаимодействия. Каждой вершине решетки связывали статистический вес, который зависит от цвета восьми соседних клеток, а именно с вершиной $V_{i,j,k}$ смежной с клетками $i, j, k, i, j, k+1, i+1, j, k, i+1, j, k+1, i, j+1, k, i, j+1, k+1, i+1, j+1, k, i+1, j+1, k+1$ мы связываем статистический вес

$$W_{i,j,k}(\sigma) = A_{\sigma_{i,j,k}\sigma_{i,j,k+1}\sigma_{i+1,j,k}\sigma_{i+1,j+1,k}}^{\sigma_{i,j+1,k}\sigma_{i,j+1,k+1}\sigma_{i+1,j+1,k}\sigma_{i+1,j+1,k+1}} \quad (2.1)$$

Статистическая сумма Z_{MNK} определяется как сумма по всем состояниям решетки, и каждое состояние берется с весом, равным произведению статистических весов отдельных вершин, равной

$$Z_{MNK} = \sum_{conf} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \prod_{k=1}^K W_{i,j,k}(\sigma), \quad (2.2)$$

где, как обычно, предполагаются периодические граничные условия: $\sigma_{i,j,k} = \sigma_{i+N,j,k} = \sigma_{i,j+M,k} = \sigma_{i,j,k+K}$.

Условие коммутативности трансфер-матриц следует переписывать, восстанавливая все индексы:

$$\sum_{\beta_{22}} A_{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}^{\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}} B_{\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}}^{\gamma_{11}\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_{22}} C_{\beta_{21}\beta_{22}\alpha_{21}\alpha_{22}}^{\gamma_{21}\gamma_{22}\delta_{21}\delta_{22}} C_{\beta_{22}\beta_{12}\alpha_{22}\alpha_{12}}^{\gamma_{22}\gamma_{12}\delta_{22}\delta_{12}} = \sum_{\delta_{11}} A_{\delta_{11}\delta_{12}\delta_{21}\delta_{22}}^{\gamma_{11}\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_{22}} B_{\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}^{\delta_{11}\delta_{12}\delta_{21}\delta_{22}} C_{\beta_{11}\beta_{12}\alpha_{11}\alpha_{12}}^{\gamma_{11}\gamma_{12}\delta_{11}\delta_{12}} C_{\beta_{21}\beta_{11}\alpha_{21}\alpha_{11}}^{\gamma_{21}\gamma_{11}\delta_{21}\delta_{11}} \quad (2.3)$$

Отметим, что уравнение (8) можно рассматривать как условие коммутативности трансфер-матриц, построенных по любой паре четырех матриц $A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma)$ весов вершин.

Обоими учеными предложено также обобщение уравнения Замолодчикова для моделей в пространстве большей размерности, назвав их n - симплексными уравнениями. Спустя через 10 лет, 1984 году было найдено решение уравнения

Замолодчикова с грассмановыми переменными на ребрах кубической решетки [128]. 3 - симплексное уравнение Замолодчикова:

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123}, \quad (2.4)$$

в индексной форме

$$r_{k_1k_2k_3}^{l_1l_2l_3} r_{j_1k_4k_5}^{k_1l_4l_5} r_{j_2j_4k_6}^{k_2k_4l_6} r_{j_3j_5j_6}^{k_3k_5k_6} = r_{k_3k_5k_6}^{l_3l_5l_6} r_{k_2k_4j_6}^{l_2l_4k_6} r_{k_1j_4j_5}^{l_1k_4k_5} r_{j_1j_2j_3}^{k_1k_2k_3}, \quad (2.5)$$

в последнее время активно рассматривается ведущими учеными [129]. Это уравнение впервые возникло при изучении моделей разрешимых вершин в статистической механике [88] и впоследствии было признано ключевым уравнением. Постоянная форма (2.1) важна также для квантовых групп [130], теории узлов [46]. Точнее, для каждой простой конечномерной алгебры Ли G и любого конечномерного представления G , скажем, на V можно построить семейство $R(\lambda) \in \text{End}(V \otimes V)$, удовлетворяющее уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda + \mu)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda + \mu)R_{12}(\lambda) \quad (2.6)$$

в $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ с очевидными обозначениями. Для квантовых систем с фермионными полями квазиклассический предел естественным образом приводит к некоторой абстрактной классической физике с антикоммутирующими переменными. Именно для изучения таких необычных классических систем необходима алгебра, которая оперирует функциями, антикоммутирующими переменные. Важно подчеркнуть, что в нормальной классической физике проблемы такого типа не возникают естественным образом; они появляются, как объяснено выше, только как квазиклассический предел для квантовых задач с фермионными полями. Но это уже оправдывает их исследование, поскольку изучение квазиклассического приближения для различных квантовых систем является очень важной задачей для физиков-теоретиков [131].

Важность тщательного изучения решений уравнения Янга-Бакстера связана с его ключевой ролью в точно решаемых моделях статистической механики [88] и [132] и теории поля в малых размерностях [126], конформной теории поля [133] и в квантовых интегрируемых системах [134]. С теоретико-групповой точки зрения, в то время как классическое уравнение Янга-Бакстера тесно связано с теорией классических (полупростых) групп, квантовое уравнение Янга-Бакстера является основой современной теории квантовых групп [135-138], где

$$i = (t-1)n + \binom{n+1}{2}, \quad j = \binom{n-1}{2}n + t \quad (2.7)$$

$$\tilde{i} = n^2 + 1 - i, \quad \tilde{j} = n^2 + 1 - j. \quad (2.8)$$

Существуют разные виды квантового уравнения Янга-Бакстера: константная, однопараметрическая и двухпараметрическая формы [139]. Необходимые постоянные (и перестановочные) решения уравнения Янга-Бакстера [140] применяются в квантовании интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений, теории квантовых групп [141-144] и теории узлов [145]. Решением квантового уравнения Янга-Бакстера является R - матрица [146, 147] (соответствующая матрица переноса в решетчатых статистических моделях [90]) [148].

Во втором разделе получены:

- генераторы новых решений уравнения Замолотчикова в восьмивершинной и шестивершинной интегрируемых моделях статистической механики в трехмерном пространстве;
- классификация решений уравнения Замолотчикова восьмивершинной и шестивершинной статистической механики и изучены различные случаи решений.

2.1 Уравнение R - матрицы для восьмивершинной модели над грассмановой алгеброй

Сопоставим оператору R числовую матрицу с n парами индексов:

$$R(e_{i_1}, \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = R_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} (e_{j_1}, \otimes \dots \otimes e_{j_n}), \quad (2.9)$$

где по повторяющимся индексам выполняется суммирование.

Рассмотрим 3-симплексное уравнение R - матрицы восьмивершинной модели на тензорном произведении $V^{\otimes [n(n+1)/2]}$ (4), где линейные операторы R действуют тривиально, например $R_{12}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}) = r_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} (e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes e_{i_3})$. В общем случае с $K_\alpha \in \{1, \dots, N\}$:

$$N = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.10)$$

где $n=3$ и значение N образует 6 грассмановых генераторов; операторы R имеют вид:

$$(R_{K_1 \dots K_N})_{i_1 \dots i_N}^{j_1 \dots j_N} = r_{i_{K_1} \dots i_{K_N}}^{j_{K_1} \dots j_{K_N}} \prod_{k=1, k=K_\alpha, \forall \alpha}^N \delta_{i_k}^{j_k}, \quad (2.11)$$

где $r_{i_{K_1} \dots i_{K_N}}^{j_{K_1} \dots j_{K_N}}$ - элемент R - матрицы [148].

Рассмотрим R - матрицу над четной частью грассмановой алгебры, с 6 образующими, запишем ее разложение на числовую и нильпотентную части

$$\begin{aligned}
R = & R^{(0)} + R^{(123)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + R^{(145)} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + R^{(246)} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + R^{(356)} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + R^{(124)} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\
& + R^{(125)} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + R^{(126)} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + R^{(134)} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + R^{(135)} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + R^{(136)} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + R^{(146)} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + \\
& + R^{(156)} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + R^{(234)} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + R^{(235)} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + R^{(236)} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + R^{(245)} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + R^{(256)} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + \\
& + R^{(345)} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + R^{(346)} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + R^{(456)} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + R^{(123456)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

компоненты уравнения Янга - Бакстера представим в таком же виде:

$$\begin{aligned}
R_{123} = & R_{123}^{(0)} + R_{123}^{(123)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + R_{123}^{(145)} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + R_{123}^{(246)} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + R_{123}^{(356)} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + R_{123}^{(124)} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\
& + R_{123}^{(125)} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + R_{123}^{(126)} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + R_{123}^{(134)} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + R_{123}^{(135)} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + R_{123}^{(136)} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + R_{123}^{(146)} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + \\
& + R_{123}^{(156)} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + R_{123}^{(234)} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + R_{123}^{(235)} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + R_{123}^{(236)} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + R_{123}^{(245)} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + R_{123}^{(256)} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + \\
& + R_{123}^{(345)} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + R_{123}^{(346)} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + R_{123}^{(456)} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + R_{123}^{(123456)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
R_{145} = & R_{145}^{(0)} + R_{145}^{(123)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + R_{145}^{(145)} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + R_{145}^{(246)} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + R_{145}^{(356)} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + R_{145}^{(124)} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\
& + R_{145}^{(125)} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + R_{145}^{(126)} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + R_{145}^{(134)} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + R_{145}^{(135)} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + R_{145}^{(136)} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + R_{145}^{(146)} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + \\
& + R_{145}^{(156)} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + R_{145}^{(234)} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + R_{145}^{(235)} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + R_{145}^{(236)} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + R_{145}^{(245)} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + R_{145}^{(256)} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + \\
& + R_{145}^{(345)} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + R_{145}^{(346)} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + R_{145}^{(456)} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + R_{145}^{(123456)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
R_{246} = & R_{246}^{(0)} + R_{246}^{(123)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + R_{246}^{(145)} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + R_{246}^{(246)} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + R_{246}^{(356)} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + R_{246}^{(124)} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\
& + R_{246}^{(125)} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + R_{246}^{(126)} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + R_{246}^{(134)} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + R_{246}^{(135)} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + R_{246}^{(136)} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + R_{246}^{(146)} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + \\
& + R_{246}^{(156)} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + R_{246}^{(234)} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + R_{246}^{(235)} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + R_{246}^{(236)} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + R_{246}^{(245)} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + R_{246}^{(256)} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + \\
& + R_{246}^{(345)} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + R_{246}^{(346)} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + R_{246}^{(456)} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + R_{246}^{(123456)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
R_{356} = & R_{356}^{(0)} + R_{356}^{(123)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + R_{356}^{(145)} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + R_{356}^{(246)} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + R_{356}^{(356)} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + R_{356}^{(124)} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\
& + R_{356}^{(125)} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + R_{356}^{(126)} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + R_{356}^{(134)} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + R_{356}^{(135)} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + R_{356}^{(136)} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + R_{356}^{(146)} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + \\
& + R_{356}^{(156)} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + R_{356}^{(234)} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + R_{356}^{(235)} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + R_{356}^{(236)} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + R_{356}^{(245)} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + R_{356}^{(256)} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + \\
& + R_{356}^{(345)} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + R_{356}^{(346)} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + R_{356}^{(456)} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + R_{356}^{(123456)} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Подставим выражения (7), (8), (9), (10) в (5) и получим систему уравнений для компонент 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 456, 356, 346, 345, 256, 246, 245, 236, 235, 234, 123456. Окончательные решения всех уравнений приводятся в явном виде для числовой и нильпотентной компонент

$$R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} = R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(123)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(123)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(123)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(123)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} = \\
& = R_{356}^{(123)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(123)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(123)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(123)},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(145)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(145)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(145)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(145)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} = \\
& = R_{356}^{(145)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(145)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(145)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(145)},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(246)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(246)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(0)} R_{145}^{(246)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} + R_{123}^{(246)} R_{145}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{356}^{(0)} = \\
& = R_{356}^{(246)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(246)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(246)} R_{123}^{(0)} + R_{356}^{(0)} R_{246}^{(0)} R_{145}^{(0)} R_{123}^{(246)},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Классификация решений уравнения Замолодчикова с восемью вершинами

$$R = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot \\ g & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot \\ g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad R_{13} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & f & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & g & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & c & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & g & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & f & p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & b & \cdot \\ g & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Подставим R_{12}, R_{13}, R_{23} в (2.4) и получим следующую систему уравнений:

$$cda = 0, \quad bda = 0, \quad qgf = 0, \quad pgf = 0, \quad (2.41)$$

$$da(d - a) = 0, \quad gf(g - f) = 0, \quad (2.42)$$

$$pd(d - p) + cbd = 0, \quad qd(d - q) + cbd = 0, \quad pa(a - p) + cba = 0, \quad (2.43)$$

$$qa(a - q) + cba = 0, \quad bg(g - b) + qpg = 0, \quad bf(f - b) + qpf = 0, \quad (2.44)$$

$$cg(g - c) + qpg = 0, \quad cf(f - c) + qpf = 0, \quad gq(q - g) + fgq = 0, \quad (2.45)$$

$$gp(p - g) + fgp = 0, \quad fp(p - f) + gfp = 0, \quad fq(q - f) + gfq = 0. \quad (2.46)$$

2.2.1 Классификация решений по числовой части

1. $a_0, d_0 \neq 0, b_0, c_0 = 0, a_0 = d_0, \{p_0, q_0, g_0, f_0\} = \{0, a_0\}$. Тогда для числовой части мы получаем 6 - вершинное решение:

$$R = \begin{pmatrix} \{0, a_0\} & \cdot & \cdot & \{0, a_0\} \\ \cdot & \cdot & d_0 & \cdot \\ \cdot & a_0 & \cdot & \cdot \\ \{0, a_0\} & \cdot & \cdot & \{0, a_0\} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

1. $a_0 = 0, d_0 \neq 0 \rightarrow \{p_0, q_0, g_0, f_0\}$. Тогда для числовой части получаем 7 - вершинное решение:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0} & \cdot & \cdot & b_0 - \frac{p_0 q_0}{b_0} \\ \cdot & c_0 & d_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_0 & \cdot \\ b_0 - \frac{p_0 q_0}{b_0} & \cdot & \cdot & \frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

где $\{p_0 q_0\} = \frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0}, d_0 = 0, a_0 \neq 0 \rightarrow \{p_0, q_0, g_0, f_0\}$, затем наоборот.

2. $a_0 = d_0 = 0, \{p_0, q_0, g_0, f_0\}$ - любые элементы

$$R = \begin{pmatrix} p_0 & \cdot & \cdot & f_0 \\ \cdot & c_0 & d_0 & \cdot \\ \cdot & a_0 & b_0 & \cdot \\ g_0 & \cdot & \cdot & q_0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Тогда для числовой части мы получаем 6 - вершинное решение.

2.3 Решение уравнения Замолотчикова над грассмановой алгеброй с 6-образующими

Разложим каждого элемента R - матрицы (2.43) по 6 грассмановым образующим представим в виде:

$$\begin{aligned} c = & c_0 + c_{123} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + c_{145} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + c_{246} \xi_2 \xi_4 \xi_6 + c_{356} \xi_3 \xi_5 \xi_6 + c_{124} \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \\ & + c_{125} \xi_1 \xi_2 \xi_5 + c_{126} \xi_1 \xi_2 \xi_6 + c_{134} \xi_1 \xi_3 \xi_4 + c_{135} \xi_1 \xi_3 \xi_5 + c_{136} \xi_1 \xi_3 \xi_6 + c_{145} \xi_1 \xi_4 \xi_5 + \\ & + c_{146} \xi_1 \xi_4 \xi_6 + c_{156} \xi_1 \xi_5 \xi_6 + c_{234} \xi_2 \xi_3 \xi_4 + c_{235} \xi_2 \xi_3 \xi_5 + c_{236} \xi_2 \xi_3 \xi_6 + c_{245} \xi_2 \xi_4 \xi_5 + \\ & + c_{256} \xi_2 \xi_5 \xi_6 + c_{345} \xi_3 \xi_4 \xi_5 + c_{346} \xi_3 \xi_4 \xi_6 + c_{456} \xi_4 \xi_5 \xi_6 + c_{123456} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
p = & p_0 + p_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + p_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + p_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + p_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + p_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + p_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + p_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + p_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + p_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + p_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + p_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + p_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + p_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + p_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + c_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + p_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + p_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + p_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + p_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + p_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + p_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + p_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
b = & b_0 + b_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + b_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + b_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + b_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + b_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + b_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + b_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + b_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + b_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + b_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + b_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + b_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + b_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + b_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + b_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + b_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + b_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + b_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + b_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + b_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + b_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + b_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
q = & q_0 + q_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + q_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + q_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + q_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + q_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + q_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + q_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + q_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + q_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + q_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + q_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + q_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + q_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + q_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + q_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + q_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + q_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + q_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + q_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + q_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + q_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + q_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
a = & a_0 + a_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + a_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + a_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + a_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + a_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + a_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + a_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + a_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + a_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + a_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + a_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + a_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + a_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + a_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + a_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + a_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + a_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + a_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + a_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + a_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + a_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + a_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
g = & g_0 + g_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + g_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + g_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + g_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + g_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + g_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + g_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + g_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + g_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + g_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + g_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + g_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + g_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + g_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + g_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + g_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + g_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + g_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + g_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + g_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + g_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + g_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
d = & d_0 + d_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + d_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + d_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + d_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + c_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + d_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + d_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + d_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + d_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + d_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + d_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + d_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + d_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + d_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + d_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + d_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + d_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + d_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + d_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + d_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + d_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + d_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
f = & f_0 + c_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + f_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + f_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + f_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + f_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
& + f_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + f_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + f_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + f_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + f_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + f_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
& + f_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + f_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + f_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + f_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + f_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + f_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
& + f_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + f_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + f_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + f_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + f_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
\end{aligned} \tag{2.57}$$

2.3.1 Представление грассмановых образующих в случае I $d = 0$. Из системы уравнений (2.35 - 2.40). следует, что

$$\begin{aligned}
p_0^2 d_{123} = 0, \quad p_0^2 d_{145} = 0, \quad p_0^2 d_{246} = 0, \quad p_0^2 d_{356} = 0, \quad p_0^2 d_{124} = 0, \quad p_0^2 d_{125} = 0, \\
p_0^2 d_{126} = 0, \quad p_0^2 d_{134} = 0, \quad p_0^2 d_{135} = 0, \quad p_0^2 d_{136} = 0, \quad p_0^2 d_{146} = 0, \quad p_0^2 d_{156} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0^2 d_{234} = 0, \quad p_0^2 d_{235} = 0, \quad p_0^2 d_{236} = 0, \quad p_0^2 d_{245} = 0, \quad p_0^2 d_{256} = 0, \quad p_0^2 d_{345} = 0, \\
p_0^2 d_{346} = 0, \quad p_0^2 d_{456} = 0, \quad p_0^2 d_{123456} = 0.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
q_0^2 q_{123} = 0, \quad q_0^2 q_{145} = 0, \quad q_0^2 q_{246} = 0, \quad q_0^2 q_{356} = 0, \quad q_0^2 q_{124} = 0, \quad q_0^2 q_{125} = 0, \\
q_0^2 q_{126} = 0, \quad q_0^2 q_{134} = 0, \quad q_0^2 q_{135} = 0, \quad q_0^2 q_{136} = 0, \quad q_0^2 q_{146} = 0, \quad q_0^2 q_{156} = 0, \\
q_0^2 q_{234} = 0, \quad q_0^2 q_{235} = 0, \quad q_0^2 q_{236} = 0, \quad q_0^2 q_{245} = 0, \quad q_0^2 q_{256} = 0, \quad q_0^2 q_{345} = 0, \\
q_0^2 q_{346} = 0, \quad q_0^2 q_{456} = 0, \quad q_0^2 q_{123456} = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
a_0^2 a_{123} = 0, \quad a_0^2 a_{145} = 0, \quad a_0^2 a_{246} = 0, \quad a_0^2 a_{356} = 0, \quad a_0^2 a_{124} = 0, \quad a_0^2 a_{125} = 0, \\
a_0^2 a_{126} = 0, \quad a_0^2 a_{134} = 0, \quad a_0^2 a_{135} = 0, \quad a_0^2 a_{136} = 0, \quad a_0^2 a_{146} = 0, \quad a_0^2 a_{156} = 0, \\
a_0^2 a_{234} = 0, \quad a_0^2 a_{235} = 0, \quad a_0^2 a_{236} = 0, \quad a_0^2 a_{245} = 0, \quad a_0^2 a_{256} = 0, \quad a_0^2 a_{345} = 0, \\
a_0^2 a_{346} = 0, \quad a_0^2 a_{456} = 0, \quad a_0^2 a_{123456} = 0.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

2.3.2 Представление грасмановых образующих в случае II

Из случая I $p_0^2 = 0$, $q_0^2 = 0$, $a_0^2 = 0$, значит $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, $a_0 = 0$, тогда система уравнений (2.52 – 5.54) примет вид:

$$\begin{aligned}
g_0^2 q_{123} - f_0 g_0 q_{123} = 0, \quad g_0^2 q_{145} - f_0 g_0 q_{145} = 0, \quad g_0^2 q_{246} - f_0 g_0 q_{246} = 0, \\
g_0^2 q_{356} - f_0 g_0 q_{356} = 0, \quad g_0^2 q_{124} - f_0 g_0 q_{124} = 0, \quad g_0^2 q_{125} - f_0 g_0 q_{125} = 0, \\
g_0^2 q_{126} - f_0 g_0 q_{126} = 0, \quad g_0^2 q_{134} - f_0 g_0 q_{134} = 0, \quad g_0^2 q_{135} - f_0 g_0 q_{135} = 0, \\
g_0^2 q_{136} - f_0 g_0 q_{136} = 0, \quad g_0^2 q_{146} - f_0 g_0 q_{146} = 0, \quad g_0^2 q_{156} - f_0 g_0 q_{156} = 0, \\
g_0^2 q_{234} - f_0 g_0 q_{234} = 0, \quad g_0^2 q_{235} - f_0 g_0 q_{235} = 0, \quad g_0^2 q_{236} - f_0 g_0 q_{236} = 0, \\
g_0^2 q_{245} - f_0 g_0 q_{245} = 0, \quad g_0^2 q_{256} - f_0 g_0 q_{256} = 0, \quad g_0^2 q_{345} - f_0 g_0 q_{345} = 0, \\
g_0^2 q_{346} - f_0 g_0 q_{346} = 0, \quad g_0^2 q_{456} - f_0 g_0 q_{456} = 0, \quad g_0^2 q_{123456} - f_0 g_0 q_{123456} = 0.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
g_0^2 p_{123} - f_0 g_0 p_{123} = 0, \quad g_0^2 p_{145} - f_0 g_0 p_{145} = 0, \quad g_0^2 p_{246} - f_0 g_0 p_{246} = 0, \\
g_0^2 p_{356} - f_0 g_0 p_{356} = 0, \quad g_0^2 p_{124} - f_0 g_0 p_{124} = 0, \quad g_0^2 p_{125} - f_0 g_0 p_{125} = 0, \\
g_0^2 p_{126} - f_0 g_0 p_{126} = 0, \quad g_0^2 p_{134} - f_0 g_0 p_{134} = 0, \quad g_0^2 p_{135} - f_0 g_0 p_{135} = 0, \\
g_0^2 p_{136} - f_0 g_0 p_{136} = 0, \quad g_0^2 p_{146} - f_0 g_0 p_{146} = 0, \quad g_0^2 p_{156} - f_0 g_0 p_{156} = 0, \\
g_0^2 p_{234} - f_0 g_0 p_{234} = 0, \quad g_0^2 p_{235} - f_0 g_0 p_{235} = 0, \quad g_0^2 p_{236} - f_0 g_0 p_{236} = 0, \\
g_0^2 p_{245} - f_0 g_0 p_{245} = 0, \quad g_0^2 p_{256} - f_0 g_0 p_{256} = 0, \quad g_0^2 p_{345} - f_0 g_0 p_{345} = 0, \\
g_0^2 p_{346} - f_0 g_0 p_{346} = 0, \quad g_0^2 p_{456} - f_0 g_0 p_{456} = 0, \quad g_0^2 p_{123456} - f_0 g_0 p_{123456} = 0.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
f_0^2 q_{123} - g_0 f_0 q_{123} = 0, \quad f_0^2 q_{145} - g_0 f_0 q_{145} = 0, \quad f_0^2 q_{246} - g_0 f_0 q_{246} = 0, \\
f_0^2 q_{356} - g_0 f_0 q_{356} = 0, \quad f_0^2 q_{124} - g_0 f_0 q_{124} = 0, \quad f_0^2 q_{125} - g_0 f_0 q_{125} = 0, \\
f_0^2 q_{126} - g_0 f_0 q_{126} = 0, \quad f_0^2 q_{134} - g_0 f_0 q_{134} = 0, \quad f_0^2 q_{135} - g_0 f_0 q_{135} = 0, \\
f_0^2 q_{136} - g_0 f_0 q_{136} = 0, \quad f_0^2 q_{146} - g_0 f_0 q_{146} = 0, \quad f_0^2 q_{156} - g_0 f_0 q_{156} = 0, \\
f_0^2 q_{234} - g_0 f_0 q_{234} = 0, \quad f_0^2 q_{235} - g_0 f_0 q_{235} = 0, \quad f_0^2 q_{236} - g_0 f_0 q_{236} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_0^2 q_{245} - g_0 f_0 q_{245} &= 0, & f_0^2 q_{256} - g_0 f_0 q_{256} &= 0, & f_0^2 q_{345} - g_0 f_0 q_{345} &= 0, \\
f_0^2 q_{346} - g_0 f_0 q_{346} &= 0, & f_0^2 q_{456} - g_0 f_0 q_{456} &= 0, & f_0^2 q_{123456} - g_0 f_0 q_{123456} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
f_0^2 p_{123} - g_0 f_0 p_{123} &= 0, & f_0^2 p_{145} - g_0 f_0 p_{145} &= 0, & f_0^2 p_{246} - g_0 f_0 p_{246} &= 0, \\
f_0^2 p_{356} - g_0 f_0 p_{356} &= 0, & f_0^2 p_{124} - g_0 f_0 p_{124} &= 0, & f_0^2 p_{125} - g_0 f_0 p_{125} &= 0, \\
f_0^2 p_{126} - g_0 f_0 p_{126} &= 0, & f_0^2 p_{134} - g_0 f_0 p_{134} &= 0, & f_0^2 p_{135} - g_0 f_0 p_{135} &= 0, \\
f_0^2 p_{136} - g_0 f_0 p_{136} &= 0, & f_0^2 p_{146} - g_0 f_0 p_{146} &= 0, & f_0^2 p_{156} - g_0 f_0 p_{156} &= 0, \\
f_0^2 p_{234} - g_0 f_0 p_{234} &= 0, & f_0^2 p_{235} - g_0 f_0 p_{235} &= 0, & f_0^2 p_{236} - g_0 f_0 p_{236} &= 0, \\
f_0^2 p_{245} - g_0 f_0 p_{245} &= 0, & f_0^2 p_{256} - g_0 f_0 p_{256} &= 0, & f_0^2 p_{345} - g_0 f_0 p_{345} &= 0, \\
f_0^2 p_{346} - g_0 f_0 p_{346} &= 0, & f_0^2 p_{456} - g_0 f_0 p_{456} &= 0, & f_0^2 p_{123456} - g_0 f_0 p_{123456} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

отсюда следует, что $g_0 = f_0$.

2.3.3 Представление грассмановых образующих в случае III

Из случая II видно, $b_0^2 = 0$, $c_0^2 = 0$, тогда $b_0 = 0$, $c_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&f_0(q_{123}g_{456} + q_{456}g_{123} + q_{124}g_{356} + q_{356}g_{124} + q_{125}g_{346} + q_{346}g_{125} + \\
&+ q_{126}g_{345} + q_{345}g_{126} + q_{134}g_{256} + q_{256}g_{134} + q_{135}g_{246} + q_{246}g_{135} + q_{136}g_{245} + q_{245}g_{136} + \\
&+ q_{145}g_{236} + q_{236}g_{145} + q_{146}g_{235} + q_{235}g_{146} + q_{156}g_{234} + q_{234}g_{156} + q_{123456}g_0 + q_0g_{123456}) - \\
&- g_0(f_{125}q_{346} + f_{346}q_{125} + f_{124}q_{356} + f_{356}q_{124} + f_{125}q_{346} + f_{346}q_{125} + f_{126}q_{345} + f_{345}q_{126} + \\
&+ f_{134}q_{256} + f_{256}q_{134} + f_{135}q_{246} + f_{246}q_{135} + f_{136}q_{245} + f_{245}q_{136} - f_{145}q_{236} + f_{236}q_{145} + \\
&+ f_{146}q_{235} + f_{235}q_{146} + f_{156}q_{234} + f_{156}q_{234} + f_{123456}q_0 + f_0q_{123456}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
&f_0(p_{123}g_{456} + p_{456}g_{123} + p_{124}g_{356} + p_{356}g_{124} + p_{125}g_{346} + p_{346}g_{125} + \\
&+ p_{126}g_{345} + p_{345}g_{126} + p_{134}g_{256} + p_{256}g_{134} + p_{135}g_{246} + p_{246}g_{135} + p_{136}g_{245} + p_{245}g_{136} + \\
&+ p_{145}g_{236} + p_{236}g_{145} + p_{146}g_{235} + p_{235}g_{146} + p_{156}g_{234} + p_{234}g_{156} + p_{123456}g_0 + p_0g_{123456}) - \\
&- g_0(f_{125}p_{346} + f_{346}p_{125} + f_{124}p_{356} + f_{356}p_{124} + f_{125}p_{346} + f_{346}p_{125} + f_{126}p_{345} + f_{345}p_{126} + \\
&+ f_{134}p_{256} + f_{256}p_{134} + f_{135}p_{246} + f_{246}p_{135} + f_{136}p_{245} + f_{245}p_{136} - f_{145}p_{236} + f_{236}p_{145} + \\
&+ f_{146}p_{235} + f_{235}p_{146} + f_{156}p_{234} + f_{156}p_{234} + f_{123456}p_0 + f_0p_{123456}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

отсюда следует, что

$$f_0 = \frac{1}{\tilde{f}_n \tilde{p}_k + \tilde{f}_k \tilde{p}_n - \tilde{p}_n \tilde{g}_k + \tilde{p}_k \tilde{g}_n}, \tag{2.67}$$

$$g_0 = \frac{1}{\tilde{q}_n \tilde{g}_k + \tilde{q}_k \tilde{g}_n - \tilde{f}_n \tilde{q}_k - \tilde{f}_n \tilde{q}_k} \tag{2.68}$$

и R - матрица выглядит таким образом

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & f \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ g & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Подставляем (2.61) и (2.62) в оставшиеся уравнения и в результате получим ряд выражений:

$$f_0 = g_0 = \frac{1}{\tilde{a}_n \tilde{g}_k + \tilde{a}_k \tilde{g}_n - \tilde{f}_n \tilde{a}_k - \tilde{f}_k \tilde{a}_n}, \quad (2.70)$$

$$f_0 = g_0 = \frac{1}{\tilde{f}_n \tilde{a}_k + \tilde{f}_k \tilde{a}_n - \tilde{a}_n \tilde{g}_k + \tilde{a}_k \tilde{g}_n}, \quad (2.71)$$

$$f_0 = g_0 = \tilde{b}_n \tilde{g}_k - \tilde{b}_k \tilde{g}_n, \quad (2.72)$$

$$f_0 = g_0 = \tilde{b}_n \tilde{f}_k - \tilde{f}_n \tilde{b}_k, \quad (2.73)$$

$$f_0 = g_0 = \tilde{c}_n \tilde{g}_k - \tilde{g}_n \tilde{c}_k, \quad (2.74)$$

$$f_0 = g_0 = \tilde{b}_n \tilde{g}_k - \tilde{b}_k \tilde{c}_n. \quad (2.75)$$

Из случаев I, II, III ясно, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = p_0 = q_0 = 0$, тогда коэффициенты остаются неопределенными $f_0, g_0, a_n, b_n, c_n, d_n, p_n, q_n, f_n, g_n, a_k, b_k, c_k, d_k, p_k, q_k, f_k, g_k$, где $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ - четные нильпотентные элементы, $n=123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 123456; k=456, 356, 346, 345, 256, 246, 245, 236, 235, 234, 123456$. Решение может быть 170-параметрическим $f_0 = y, g_0 = \omega, a_n = h_1, b_n = m_1, c_n = z_1, d_n = s_1, p_n = y_1, q_n = \omega_1, f_n = \lambda_1, g_n = \eta_1, a_k = h_2, b_k = m_2, c_k = z_2, d_k = s_2, p_k = y_2, q_k = \omega_2, f_k = \lambda_2, g_k = \eta_2$ и R - матрица может быть представлена в виде:

$$R = \begin{pmatrix} y\zeta & \cdot & \cdot & \cdot t + \zeta \\ \cdot & z\zeta & s\zeta & \\ \cdot & h\zeta & m\zeta & \cdot \\ r + \zeta & \cdot & \cdot & w\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & t \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ r & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & \cdot & \cdot & \lambda \\ \cdot & z & s & \cdot \\ \cdot & h & m & \cdot \\ \eta & \cdot & \cdot & w \end{pmatrix} \zeta, \quad (2.76)$$

где $\zeta = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_4 \zeta_5 + \zeta_2 \zeta_4 \zeta_6 + \zeta_3 \zeta_5 \zeta_6 + \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_6$. Это решение представляет собой 8-вершинную модель с двумя обратимыми элементами.

2.4 Классификация решений уравнения Замолодчикова с шестью вершинной моделью

Восьмивершинным решением уравнения Янга-Бакстера является матрица вида:

$$R = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

где a, b, c, d, p, q являются элементами алгебры Грассмана. Из (2.5) следует явный вид матриц:

$$R_{123} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad R_{145} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

$$R_{246} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \quad R_{356} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Подставим $R_{123}, R_{145}, R_{246}, R_{356}$ в (2.2) и получим следующую систему уравнений:

$$cda = 0, \quad (2.80)$$

$$bda = 0, \quad (2.81)$$

$$da(d-a) = 0, \quad pd(d-p) + cbd = 0, \quad (2.82)$$

$$qd(d-q) + cbd = 0, \quad pa(a-p) + cba = 0, \quad qa(a-q) + cba = 0. \quad (2.83)$$

2.5 Решение уравнения Замолотчикова над алгеброй Грассмана с 6-ю образующими

Рассмотрим конкретный тип решений шестивершинной модели. Разобьем каждый элемент R -матрицы (2.13) на генераторы Грассмана в виде:

$$\begin{aligned}
 c = & c_0 + c_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + c_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + c_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + c_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + c_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + c_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + c_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + c_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + c_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + c_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + c_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + c_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + c_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + c_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + c_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + c_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + c_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + c_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + c_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + c_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + c_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + c_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}
 p = & p_0 + p_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + p_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + p_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + p_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + p_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + p_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + p_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + p_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + p_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + p_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + p_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + p_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + p_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + p_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + c_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + p_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + p_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + p_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + p_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + p_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + p_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + p_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
 b = & b_0 + b_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + b_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + b_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + b_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + b_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + b_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + b_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + b_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + b_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + b_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + b_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + b_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + b_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + b_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + b_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + b_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + b_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + b_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + b_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + b_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + b_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + b_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
 q = & q_0 + q_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + q_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + q_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + q_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + q_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + q_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + q_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + q_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + q_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + q_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + q_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + q_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + q_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + q_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + q_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + q_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + q_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + q_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + q_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + q_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + q_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + q_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
 d = & d_0 + d_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + d_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + d_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + d_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + c_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + d_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + d_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + d_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + d_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + d_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + d_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + d_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + d_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + d_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + d_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + d_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + d_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + d_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + d_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + d_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + d_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + d_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
 a = & a_0 + a_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + a_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + a_{246}\xi_2\xi_4\xi_6 + a_{356}\xi_3\xi_5\xi_6 + a_{124}\xi_1\xi_2\xi_4 + \\
 & + a_{125}\xi_1\xi_2\xi_5 + a_{126}\xi_1\xi_2\xi_6 + a_{134}\xi_1\xi_3\xi_4 + a_{135}\xi_1\xi_3\xi_5 + a_{136}\xi_1\xi_3\xi_6 + a_{145}\xi_1\xi_4\xi_5 + \\
 & + a_{146}\xi_1\xi_4\xi_6 + a_{156}\xi_1\xi_5\xi_6 + a_{234}\xi_2\xi_3\xi_4 + a_{235}\xi_2\xi_3\xi_5 + a_{236}\xi_2\xi_3\xi_6 + a_{245}\xi_2\xi_4\xi_5 + \\
 & + a_{256}\xi_2\xi_5\xi_6 + a_{345}\xi_3\xi_4\xi_5 + a_{346}\xi_3\xi_4\xi_6 + a_{456}\xi_4\xi_5\xi_6 + a_{123456}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

2.5.1 Расчет нильпотентных и числовых элементов. Случай I

$d_0 = 0$. Из полученной системы уравнений следует, что $p_0^2 - b_0 c_0 = 0$ и $q_0^2 - b_0 c_0 = 0$. Ставим $p = 1$, затем $p_0^2 = q_0^2 = b_0 c_0 = 1$

$$ad = 0, \quad (2.90)$$

$$a \left(a + \frac{\tilde{c}}{c_0} + \frac{\tilde{b}}{b_0} + \frac{\tilde{b}}{b_0} \frac{\tilde{c}}{c_0} \right) = 0 \quad (2.91)$$

$$d \left(d + \frac{\tilde{c}}{c_0} + \frac{\tilde{b}}{b_0} + \frac{\tilde{b}}{b_0} \frac{\tilde{c}}{c_0} \right) = 0 \quad (2.92)$$

Числовая часть параметра q благодаря q_0^2 может принимать значения ± 1 . Соответственно уравнения для нилькомпоненты \tilde{q} представляют собой две разные системы уравнений:

$$q_0 = +1 \rightarrow a \tilde{q} = 0, \quad d \tilde{q} = 0, \quad (2.93)$$

$$q_0 = -1 \rightarrow a(a - \tilde{q}) = 0, \quad d(d - \tilde{q}) = 0. \quad (2.94)$$

Уравнения (2.89) и (2.90) удобнее переписать, применяя (2.84), (2.85), (2.86) в виде, линейном по a и d :

$$q_0 = +1 \rightarrow a \tilde{q} = 0, \quad d \tilde{q} = 0, \quad (2.89)$$

$$q_0 = -1 \rightarrow a(\tilde{q} - f) = 0, \quad d(\tilde{q} - f) = 0, \quad (2.90)$$

где $f = -\frac{\tilde{b}}{b_0} - \frac{\tilde{c}}{c_0} - \frac{\tilde{b}}{b_0} \frac{\tilde{c}}{c_0}$.

$$\begin{aligned} & q_{123} a_{456} - q_{124} a_{356} + q_{125} a_{346} + q_{126} a_{345} + q_{134} a_{256} + q_{135} a_{246} + q_{136} a_{245} + q_{145} a_{236} + \\ & + q_{146} a_{235} + q_{156} a_{234} + q_{234} a_{156} - q_{235} a_{246} + q_{236} a_{145} + q_{245} a_{136} + q_{246} a_{135} + q_{256} a_{134} + \\ & + q_{345} a_{126} + q_{346} a_{125} + q_{356} a_{124} + q_{456} a_{123} = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} & q_{123} d_{456} - q_{124} d_{356} + q_{125} d_{346} + q_{126} d_{345} + q_{134} d_{256} + q_{135} d_{246} + q_{136} d_{245} + q_{145} d_{236} + \\ & + q_{146} d_{235} + q_{156} d_{234} + q_{234} d_{156} - q_{235} d_{246} + q_{236} d_{145} + q_{245} d_{136} + q_{246} d_{135} + q_{256} d_{134} + \\ & + q_{345} d_{126} + q_{346} d_{125} + q_{356} d_{124} + q_{456} d_{123} = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}
& (2(a_{123}q'_{145} - a_{145}q'_{123}) + (q_{123}f_{145} - q_{145}f_{123}))a_{256} - (2(a_{123}q'_{156} - a_{156}q'_{123}) + \\
& + (q_{123}f_{156} - q_{156}f_{123}))a_{345} - (2a_{123}q'_{345} + (q_{123}f_{345} - q_{345}f_{123}))a_{156} + (2a_{123}q'_{356} + , \\
& + (q_{123}f_{356} - q_{356}f_{123}))a_{145} - (2a_{123}q'_{456} + (q_{123}f_{456} - q_{456}f_{123}))a_{123} = 0
\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
& (2(d_{123}q'_{145} - d_{145}q'_{123}) + (q_{123}f_{145} - q_{145}f_{123}))d_{256} - (2(d_{123}q'_{156} - d_{156}q'_{123}) + \\
& + (q_{123}f_{156} - q_{156}f_{123}))d_{345} - (2d_{123}q'_{345} + (q_{123}f_{345} - q_{345}f_{123}))d_{156} + (2d_{123}q'_{356} + , \\
& + (q_{123}f_{356} - q_{356}f_{123}))d_{145} - (2d_{123}q'_{456} + (q_{123}f_{456} - q_{456}f_{123}))d_{123} = 0
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{123}q'_{145} - a_{145}q'_{123})d_{256} - (a_{123}q'_{156} - a_{156}q'_{123})d_{345} - (a_{123}q'_{345})d_{156} + (a_{123}q'_{256} - \\
& - a_{256}q'_{123})d_{145} + (-2a_{123}q'_{456} + (a_{145}q'_{256} + a_{256}q'_{145}) - (a_{156}q'_{345} + a_{345}q'_{156})) = 0'
\end{aligned} \tag{2.95}$$

где $q' = \tilde{q}$ в случае "+" и $q' = \tilde{q} - f$ в случае "-".

2.5.2 Расчет нильпонентных и числовых элементов. Случай II

Из случая I $p_0^2 = 0$, $q_0^2 = 0$, $a_0^2 = 0$, означает $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, $a_0 = 0$, то система уравнений принимает вид $p_0^2 - b_0c_0 = 0$ и $q_0^2 - b_0c_0 = 0 \rightarrow p_0 = b_0 = 0$, $c_0 \neq 0 \rightarrow c = 1$. Следовательно, уравнения принимают вид

$$ad = 0, a(p^2 - pa - b) = 0, d(p^2 - pd - b) = 0, \tag{2.96}$$

$$a(q^2 - qa - b) = 0, q(d^2 - qd - b) = 0, \tag{2.97}$$

$$-b_{123}a_{456} + b_{145}a_{356} - b_{156}a_{345} - b_{345}a_{156} + b_{356}a_{145} - b_{345}a_{123} = 0, \tag{2.98}$$

$$-b_{123}d_{456} + b_{145}d_{356} - b_{156}d_{345} - b_{345}d_{156} + b_{356}d_{145} - b_{345}d_{123} = 0, \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{123}b_{145} - a_{145}b_{123})b_{356} - (a_{123}b_{156} - a_{156}b_{123})d_{345} - (a_{123}b_{345} - a_{345}b_{123})d_{156} + (a_{123}b_{356} - \\
& - a_{356}b_{123})d_{145} + (-2a_{123}b_{456} + (a_{145}b_{356} + a_{356}b_{145}) - (a_{156}b_{345} + a_{345}b_{156}))d_{123} = 0
\end{aligned} \tag{2.100}$$

следует, что $g_0 = f_0$.

Из случаев I, II понятно, что коэффициенты остаются неопределенными $a_n, b_n, c_n, d_n, p_n, q_n, a_k, b_k, c_k, d_k, p_k, q_k$, где $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ - четные нильпонентные элементы, $n=123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 123456$; $k=456, 356, 346, 345, 256, 246, 245, 236, 235, 234, 123456$.

Решение может быть $a_n = h_1$, $b_n = m_1$, $c_n = z_1$, $d_n = s_1$, $p_n = y_1$, $q_n = \omega_1$, $b_k = m_2$, $c_k = z_2$, $d_k = s_2$, $p_k = y_2$, $q_k = \omega_2$, и R - матрица может быть представлена как $a_n = h_1$, $b_n = m_1$, $c_n = z_1$, $d_n = s_1$, $p_n = y_1$, $q_n = \omega_1$, $a_k = h_2$, $b_k = m_2$, $c_k = z_2$, $d_k = s_2$, $p_k = y_2$, $q_k = \omega_2$

$$R = \begin{pmatrix} y\zeta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & z\zeta & s\zeta & \cdot \\ \cdot & h\zeta & m\zeta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & w\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & z & s & \cdot \\ \cdot & h & m & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & w \end{pmatrix} \zeta, \quad (2.101)$$

где $\zeta = \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4\xi_5 + \xi_2\xi_4\xi_6 + \xi_3\xi_5\xi_6 + \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_6$. Это решение представляет собой 6 - вершинную модель с двумя обратимыми элементами.

В результате рассмотрено трехмерное обобщение решения уравнения Янга-Бакстера для восьмивершинной модели, используемое для описания двухпараметрической квантовой плоскости [149] и особого вида квантовых вентилях [150, 151]. Рассмотрены частные случаи решения R - матрицы восьмивершинной и шестивершинных моделей, обладающими нильпонентными и числовыми образующими [140, 152], в нашем случае над алгеброй Грассмана все элементы одновременно могут быть ненулевыми.

Выводы по второму разделу:

– в первом подразделе исследована трехмерное обобщение решения уравнения Янга-Бакстера для восьмивершинной модели, применяемые для описания двухпараметрической квантовой плоскости и специального вида квантовых гейтов;

– во втором и четвертом подразделах исследованы серия решений уравнения Замолотчикова для восьмивершинной и шестивершинной моделей на простой квадратной решетке. В результате является как достаточное условие перестановки матриц перехода на простой квадратной решетке;

– в третьем и пятом подразделах рассмотрены частные случаи решения, когда R - матрица не обладает ненулевыми элементами в поле простых чисел и появляются новые типы решений, которых нет в стандартном случае, полные 8 - вершинное и 6 - вершинное решения.

3 ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

3.1 Точное решение для восьмивершинной спиновой модели

В третьем разделе вычислены:

– метод, обеспечивающий общий способ построения новых интегрируемых моделей с взаимодействием ближайших соседей. На основе интегрируемости определено точное значение собственного состояния матрицы через алгебраический анзац Бете;

– значения элементов десятивершинной модели, связанная с полуцелым спином. Найдены собственное состояние и собственное значение трансфер - матрицы, используя и подставляя параметризацию в уравнение Янга-Бакстера;

– статсумма для генераторов группы кос из больцмановских весов десятивершинной модели в условиях асимметризации, которая выражается полиномом Джонса.

Элементарное возбуждение является бесщелевым, если анизотропный параметр является действительным, в то время как элементарное возбуждение имеет увеличенную щель благодаря взаимодействиям ближайших соседей и киральными тремя спинами, если анизотропный параметр является мнимым [153]. Матричная форма матрицы монодромии $T_0(\lambda)$ в подпространстве:

$$\tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ действующие операторы в квантовом пространстве.

Вакуумный вектор зададим как:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3N}. \quad (3.2)$$

Тогда

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad B(\lambda)|0\rangle \neq 0, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad (3.3)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{\sin^N(\lambda + a + c + \delta) \sin^N(\lambda - a + c + \delta) \sin^N(\lambda - a - c + \delta)}{\sin^{3N} \delta},$$

$$d(\lambda) = \frac{\sin^N(\lambda + a + c) \sin^N(\lambda - a + c) \sin^N(\lambda - a - c)}{\sin^{3N} \delta}.$$

Из (3.3) оператор $B(\lambda)$ можно рассматривать как оператор произведения всех собственных состояний.

Допустим, что собственные состояния имеют форму:

$$|\theta_1, \dots, \theta_M\rangle = \prod_{j=1}^M B(\theta_j)|0\rangle, \quad (3.4)$$

где M – число перевернутых спинов и $\{\theta_j\}$ – корни Бете.

3.1.1 Коммутативные соотношения Янга-Бакстера

Из уравнения Янга-Бакстера можно доказать, что матрица монодромии $T(u)$ удовлетворяет соотношению Янга-Бакстера:

$$R_{1,2}(\lambda - \varrho)T_1(\lambda)T_2(\varrho) = T_2(\varrho)T_1(\lambda)R_{1,2}(\lambda - \varrho). \quad (3.5)$$

В результате получаются коммутативные соотношения среди элементов матрицы монодромии [154]

$$\begin{aligned} [A(\lambda), A(\varrho)] &= [B(\lambda), B(\varrho)] = [C(\lambda), C(\varrho)] = [D(\lambda), D(\varrho)] = 0, \\ A(\lambda)B(\varrho) &= \frac{\sin(\lambda - \varrho - \tau - \delta)}{\sin(\lambda - \varrho - \tau)} B(\varrho)A(\lambda) + \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda - \varrho - \tau)} B(\lambda)A(\varrho), \\ D(\lambda)B(\varrho) &= \frac{\sin(\lambda - \varrho - \tau + \delta)}{\sin(\lambda - \varrho - \tau)} B(\varrho)D(\lambda) - \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda - \varrho - \tau)} B(\lambda)D(\varrho), \\ R_{1,2}(\lambda - \varrho)T_1(\lambda)T_2(\varrho) &= T_2(\varrho)T_1(\lambda)R_{1,2}(\lambda - \varrho). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из уравнения

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \text{tr} T_0(\lambda), \\ \hat{t}(\lambda) &= \text{tr} \hat{T}_0(\lambda) \end{aligned} \quad (3.7)$$

следует, что матрицы переноса являются следом матриц монодромии во вспомогательном пространстве.

Используя симметрию пересечения в уравнении

$$R_{0,j}(\lambda) = R_{j,0}(\lambda) = R_{0,j}^{t_0, t_j}(\lambda) \quad (3.8)$$

получим соотношения между матрицами переноса $t(\lambda)$ и $\hat{t}(\lambda)$

$$t(\lambda) = \hat{t}(-\lambda - \delta), \quad \hat{t}(\lambda) = t(-\lambda - \delta). \quad (3.9)$$

Из (3.5) и (3.9) можно доказать, что матрицы переноса $t(\lambda)$ с различными спектральными параметрами коммутируют друг с другом. В то же время, матрицы переноса $t(\lambda)$ и $\hat{t}(\lambda)$ также коммутируют друг с другом

$$[t(\lambda), t(\varrho)] = [\hat{t}(\lambda), \hat{t}(\varrho)] = [t(\lambda), \hat{t}(\lambda)] = 0. \quad (3.10)$$

Следовательно, $t(\lambda)$ и $\hat{t}(\lambda)$ служат производящими функциями всех сохраняющихся величин системы. Отметим, что матрицы переноса $t(\lambda)$ и $\hat{t}(\lambda)$ могут быть диагонализированы одновременно.

3.1.2 Собственное значение и состояние Бете в квантовом пространстве
Из (3.7) следует, что трансфер матрица $t(\lambda)$ определяется выражением :

$$t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda). \quad (3.11)$$

Действуя трансфер матрицей $t(\lambda)$ на состояние Бете (3.4) и с помощью коммутационных соотношений (3.6), имеем [155]

$$t(\lambda)|\theta_1, \dots, \theta_M\rangle = \mathfrak{Z}(\lambda)|\theta_1, \dots, \theta_M\rangle + \sum_{j=1}^M \mathfrak{Z}_j(\lambda) B(\theta_1) \dots B(\theta_{j-1}) B(\lambda) B(\theta_{j+1}) \dots B(\theta_M) |0\rangle \quad (3.12)$$

где \mathfrak{Z} - собственное состояние в квантовом пространстве и

$$\Lambda(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\sin(\lambda - \theta_j - \delta)}{\sin(\lambda - \theta_j)} + d(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\sin(\lambda - \theta_j + \delta)}{\sin(\lambda - \theta_j)},$$

$$\Lambda_j(\lambda) = \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda - \theta_j)} \left\{ a(\theta_j) \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin(\theta_j - \theta_l - \delta)}{\sin(\theta_j - \theta_l)} - d(\theta_j) \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin(\theta_j - \theta_l + \delta)}{\sin(\theta_j - \theta_l)} \right\}. \quad (3.13)$$

Собственное значение соответствует первому члену в формуле (3.12), в то время как последние члены в (3.12) являются нежелательными. Состояние (3.4) становится собственным состоянием (или состоянием Бете) матрицы переноса при условии, что параметры удовлетворяют уравнениям анзаца Бете,

$$\left[\frac{\sin(\theta_j + a + c + \delta) \sin(\theta_j - a + c + \delta) \sin(\theta_j - a - c + \delta)}{\sin(\theta_j + a + c) \sin(\theta_j - a + c) \sin(\theta_j - a - c)} \right]^N = \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin(\theta_j - \theta_l + \delta)}{\sin(\theta_j - \theta_l - \delta)}, \quad j=1, \dots, M. \quad (3.14)$$

Для удобства введем обозначения [156] $\theta_j = i\lambda_j - \frac{\delta}{2}$, $\theta_l = i\lambda_l + \frac{\delta}{2}$, $a = ib + \frac{k}{2}$, $c = id - \frac{k}{2}$ для действительной части δ , $\theta_j = \lambda_j + \frac{\delta}{2}$, $\theta_l = i\lambda_l - \frac{\delta}{2}$, для мнимой части $\delta = -i\mu$. Таким образом уравнение анзаца Бете примет вид

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} + ib + \frac{k}{2} + id - \frac{k}{2} + \delta\right) \sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - ib + \frac{k}{2} + id - \frac{k}{2} + \delta\right) \sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - ib + \frac{k}{2} - id - \frac{k}{2} + \delta\right)}{\sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} + ib + \frac{k}{2} + id - \frac{k}{2}\right) \sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - ib + \frac{k}{2} + id - \frac{k}{2}\right) \sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - ib - \frac{k}{2} - id - \frac{k}{2}\right)} \right]^N = \\
& = \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - i\lambda_l + \frac{\delta}{2} + \delta\right)}{\sin\left(i\lambda_j - \frac{\delta}{2} - i\lambda_l + \frac{\delta}{2} - \delta\right)}, \\
& \left[\frac{\sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j + 2b + 2d - i\delta) \sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2b + 2d - i\delta) \sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2b - 2d - i\delta)}{\sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j + 2b + 2d + i\delta) \sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2b + 2d + i\delta) \sinh \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2b - 2d + i\delta)} \right] = \\
& = \prod_{l \neq j}^M \frac{\sinh \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_l - i\delta)}{\sinh \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_l + \delta)}, \quad j=1, \dots, M \tag{3.15}
\end{aligned}$$

для действительной части δ , и

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} + a + \frac{k}{2} + c - \frac{k}{2} - i\mu\right) \sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - a + \frac{k}{2} + c - \frac{k}{2} - i\mu\right) \sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - a + \frac{k}{2} - c - \frac{k}{2} - i\mu\right)}{\sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} + a + \frac{k}{2} + c - \frac{k}{2}\right) \sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - a + \frac{k}{2} + c - \frac{k}{2}\right) \sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - a + \frac{k}{2} - c - \frac{k}{2}\right)} \right]^N = \\
& = \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - i\lambda_l - \frac{i\mu}{2} + i\mu\right)}{\sin\left(i\lambda_j + \frac{i\mu}{2} - i\lambda_l - \frac{i\mu}{2} - i\mu\right)}, \\
& \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(2\lambda_j + 2a + 2c - i\mu) \sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2a + 2c - i\mu) \sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2a - 2c - i\mu)}{\sin \frac{1}{2}(2\lambda_j + 2a + 2c + i\mu) \sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2a + 2c + i\mu) \sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2a - 2c + i\mu)} \right] = \prod_{l \neq j}^M \frac{\sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2\lambda_l + i\mu)}{\sin \frac{1}{2}(2\lambda_j - 2\lambda_l - i\mu)} \quad j=1, \dots, M \tag{3.16}
\end{aligned}$$

для мнимой части $\delta = -i\mu$.

3.2 Исследование связи десятивершинной модели с XXZ - моделью Гейзенберга

В данном параграфе исследуются спиновые модели, которые являются простейшим представлением для описания магнитных материалов и долгое время играли центральную роль в изучении статистических и термодинамических свойств этого важного класса систем. Цепочки спинов используются для изучения одномерного случая, который относительно прост для классических спинов, но уже показывают богатую алгебраическую структуру, когда вводятся квантовые спины, подчиняющиеся алгебре Гейзенберга [157]. Введение аксиальной анизотропии, нарушающей полную симметрию вращения в спиновом пространстве, приводит к так называемой XXZ

- модели Гейзенберга. В представленном пункте рассматривается десятивершинная модель, связанная с полуцелым спином. Эта модель является простейшим расширением восьмивершинной модели [158]. Это точное решение показало ориентир для понимания разнообразия физических явлений в малых измерениях, таких как поведение жидкости Латтинжера и дробные возбуждения. Кроме того, эта модель также становится типичной моделью при разработке новых теоретических методов для подхода к общим квантовым интегрируемым системам [159-161]. Квантово - интегрируемые модели особенно очень полезны в наноразмерных системах, где альтернативные подходы включают среднее поле приближения или возмущения [154].

Поскольку говорится о некоторых моделях физической важности, сначала должны быть сформулированы общие физические рамки. Рассматриваем классическую систему взаимодействующих частиц.

3.2.1 Энергия состояния в узлах квадратной решетки десятивершинной модели

Пусть $E(C)$ - энергия состояния, определяемая обычной гамильтоновой механикой. Предполагается, что система слабо взаимодействует с термостатом с температурой T . Наиболее фундаментальный постулат статистической механики, закон Гиббса, говорит, что вероятность состояния C определяется как

$$E = \sum_{j=1}^{10} N_j \varepsilon_j, \quad (3.17)$$

где N_j - число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации

$$Z = \sum_{j=1}^N e^{\frac{E}{T}} = \sum \prod_j \omega_j N_j, \quad (3.18)$$

$$\omega_j = e^{-\beta \varepsilon_j}, \text{ где } \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (3.19)$$

ε_j - энергия узла, T - температура

$$Z = \sum_{j=1}^{N=10} \exp \left[\frac{-\left(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 + \dots + n_{10} \varepsilon_{10} \right)}{k_B T} \right]. \quad (3.20)$$

Формулы (3.19) и (3.20) являются функцией десяти больцмановских весов

$$\omega_j = \exp \left(-\frac{\varepsilon_j}{k_B T} \right), \quad j = 1 \dots 10. \quad (3.21)$$

Если на решетку наложены граничные условия, то

$$\begin{aligned}
n_9 &= n_{10}, \quad \varepsilon_9 = \varepsilon_{10}, \\
n_7 &= n_8, \quad \varepsilon_7 = \varepsilon_8, \\
n_5 &= n_6, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_6, \\
n_3 &= n_4, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4, \\
n_2 &= n_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Исследуется модель без внешнего поля, в которой пара вершин образуют симметрию и равны:

$$a = \omega_1 = \omega_2, \quad b = \omega_3 = \omega_4, \quad c = \omega_5 = \omega_6, \quad g = \omega_7 = \omega_8, \quad d = \omega_9 = \omega_{10}, \tag{3.23}$$

$$Z = e^{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k_B T}}, \tag{3.24}$$

$$Z_{12} = e^{\frac{\varepsilon_1 n_1}{k_B T} + \frac{\varepsilon_2 n_2}{k_B T}} = a^{n_1 + n_2},$$

$$Z_{34} = e^{\frac{\varepsilon_3 n_3}{k_B T} + \frac{\varepsilon_4 n_4}{k_B T}} = b^{n_3 + n_4},$$

$$Z_{56} = e^{\frac{\varepsilon_5 n_5}{k_B T} + \frac{\varepsilon_6 n_6}{k_B T}} = c^{n_5 + n_6},$$

$$Z_{78} = e^{\frac{\varepsilon_7 n_7}{k_B T} + \frac{\varepsilon_8 n_8}{k_B T}} = d^{n_7 + n_8},$$

$$Z_{910} = e^{\frac{\varepsilon_9 n_9}{k_B T} + \frac{\varepsilon_{10} n_{10}}{k_B T}} = g^{n_9 + n_{10}}. \tag{3.25}$$

3.2.2 Статистическая сумма больцмановских весов в вершинных моделях

Статсумма Z есть функция $Z(a, d, c, d, g)$ Фан и Ву показали, что функция $Z(a, d, c, d, g)$ имеет некоторые симметрии, из этого следует больцмановский вес вершины равен $\omega(\mu, \alpha | \beta, \nu)$

$$\omega_1 = (++++) = \omega_2(----) = a, \tag{3.26}$$

$$\omega_3 = (+-|-+) = \omega_4(-+|+-) = b, \tag{3.27}$$

$$\omega_5 = (+-|+-) = \omega_6(-+|+-) = c, \tag{3.28}$$

$$\omega_7 = (++|--) = \omega_8(--|++) = d, \tag{3.29}$$

$$\omega_9 = (-+|++) = \omega_{10}(+-|--) = g. \tag{3.30}$$

Введем величину $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M}^{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_M}$ полезно рассматривать как матричный элемент оператора, действующего в пространстве $H = C^2 \otimes C^2 \otimes \dots \otimes C^2 = (C^2)^{\otimes N}$ взятого в базисе $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle$:

$$\begin{aligned}
T &= |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}\rangle = T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M}^{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_N} |\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \dots, \alpha'_N\rangle, \\
T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}^{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_N} &= \sum_{\beta_1 \dots \beta_N} R_{\alpha_1}^{\alpha'_1}(\beta_1, \beta_2) R_{\alpha_2}^{\alpha'_2}(\beta_2, \beta_2) \dots R_{\alpha_N}^{\alpha'_N}(\beta_N, \beta_N), \\
T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}^{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_N} &= R_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha'_1 \beta'_1} + R_{\alpha_2 \beta_2}^{\alpha'_2 \beta'_2} + R_{\alpha_3 \beta_3}^{\alpha'_3 \beta'_3} + R_{\alpha_4 \beta_4}^{\alpha'_4 \beta'_4} + R_{\alpha_5 \beta_5}^{\alpha'_5 \beta'_5} + R_{\alpha_6 \beta_6}^{\alpha'_6 \beta'_6} + R_{\alpha_7 \beta_7}^{\alpha'_7 \beta'_7} \\
&+ R_{\alpha_8 \beta_8}^{\alpha'_8 \beta'_8} + R_{\alpha_9 \beta_9}^{\alpha'_9 \beta'_9} + R_{\alpha_{10} \beta_{10}}^{\alpha'_{10} \beta'_{10}}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Статсумма определяется выражением:

$$Z = \text{tr}_H T^M, \tag{3.32}$$

где след берется в пространстве H . Таким образом, для нахождения статсуммы достаточно найти собственные значения матрицы T . Трансфер матрица - T^M описывает переход от одного горизонтального ряда вертикальных ребер к следующему.

3.2.3 Диагонализация трансфер матрицы в теории точно решаемых моделей

Диагонализация трансфер - матрицы - первая основная задача в теории вершинных моделей:

$$\left(R_{\alpha}^{\alpha'} \right) (\beta, \beta') = R_{\alpha}^{\alpha'} (\beta, \beta'), \tag{3.33}$$

$$T_{\alpha}^{\{\alpha'\}} = \text{tr} C^2 \left(R_{\alpha_1}^{\alpha'_1}, R_{\alpha_2}^{\alpha'_2}, \dots, R_{\alpha_N}^{\alpha'_N} \right). \tag{3.34}$$

Набор больцмановских весов $R_{\alpha}^{\alpha'} (\beta, \beta') = R_{\alpha \beta}^{\alpha' \beta'}$ можно объединить в матрицу 5×5 и понимать ее как матрицу линейного оператора в тензорном произведении двух двумерных пространств. Совокупность больцмановских весов задает линейный оператор:

$$R: C^2 \otimes C^2 \Rightarrow C^2 \otimes C^2 \otimes C^{N+1}. \tag{3.35}$$

В базисе $|\alpha_n\rangle \otimes |\beta\rangle$ он действует так: $R: |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle \rightarrow R_{\alpha_n \beta_n}^{\alpha'_n \beta'_n}$,

$$\begin{aligned}
R: |\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle &\rightarrow R_{\alpha_1\beta_1}^{\alpha'_1\beta'_1} |\alpha'_1\rangle \otimes |\beta'_1\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle \rightarrow R_{\alpha_2\beta_2}^{\alpha'_2\beta'_2} |\alpha'_2\rangle \otimes |\beta'_2\rangle + |\alpha_3\rangle \otimes |\beta_3\rangle \rightarrow R_{\alpha_3\beta_3}^{\alpha'_3\beta'_3} \\
|\alpha_3\rangle \otimes |\beta_3\rangle &+ |\alpha_4\rangle \otimes |\beta_4\rangle \rightarrow R_{\alpha_4\beta_4}^{\alpha'_4\beta'_4} |\alpha'_4\rangle \otimes |\beta'_4\rangle + |\alpha_5\rangle \otimes |\beta_5\rangle \rightarrow R_{\alpha_5\beta_5}^{\alpha'_5\beta'_5} |\alpha'_5\rangle \otimes |\beta'_5\rangle + |\alpha_6\rangle \otimes |\beta_6\rangle \\
&\rightarrow R_{\alpha_6\beta_6}^{\alpha'_6\beta'_6} |\alpha'_6\rangle \otimes |\beta'_6\rangle + |\alpha_7\rangle \otimes |\beta_7\rangle \rightarrow R_{\alpha_7\beta_7}^{\alpha'_7\beta'_7} |\alpha'_7\rangle \otimes |\beta'_7\rangle + |\alpha_8\rangle \otimes |\beta_8\rangle \rightarrow R_{\alpha_8\beta_8}^{\alpha'_8\beta'_8} |\alpha'_8\rangle \otimes |\beta'_8\rangle \\
&+ |\alpha_9\rangle \otimes |\beta_9\rangle \rightarrow R_{\alpha_9\beta_9}^{\alpha'_9\beta'_9} |\alpha'_9\rangle \otimes |\beta'_9\rangle + |\alpha_{10}\rangle \otimes |\beta_{10}\rangle \rightarrow R_{\alpha_{10}\beta_{10}}^{\alpha'_{10}\beta'_{10}} |\alpha'_{10}\rangle \otimes |\beta'_{10}\rangle.
\end{aligned} \quad (3.36)$$

Матрица R в базисе $|+\rangle \otimes |+\rangle, |-\rangle \otimes |+\rangle, |+\rangle \otimes |-\rangle, |-\rangle \otimes |-\rangle$

$$T = Tr_{V_0}(R_{10}R_{20}\dots R_{N_0}), \quad (3.37)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad T = A + D, \quad \Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (3.38)$$

Возникает вопрос, когда трансфер - матрица $T = tr_{V_0} \tau = tr_{V_0}(R_{10}R_{20}\dots R_{N_0})$ будет коммутировать. Здесь R' - R - матрица с параметрами (a', b', c') . Произведение T и T' можно записать в виде:

$$TT' = tr_{V_0 \otimes V_0}(\tau \otimes \tau'), \quad T'T = tr_{V_0 \otimes V_0}(\tau' \otimes \tau), \quad (3.39)$$

$$\tau \otimes \tau = M(\tau \otimes \tau')M^{-1} \text{ или } M(\tau' \otimes \tau) = (\tau' \otimes \tau)M. \quad (3.40)$$

Матрица их тензорного произведения запишется в базисе, образованном тензорным произведением базисов в виде блочной матрицы:

$$\tau' \otimes \tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Соответствующая операция над матрицами называется кронекеровским произведением, по имени Леопольда Кронекера.

3.2.4 Собственное состояние и собственное значение трансфер – матрицы

Наша главная задача - найти собственное состояние и собственное значение трансфер - матрицы, подставив параметризацию в уравнение Янга – Бакстера, где

$$a = \rho \sinh(u - \eta), \quad (3.42)$$

$$b = \rho \sinh u, \quad (3.43)$$

$$c = \rho \sinh \eta, \quad (3.44)$$

$$d = \rho \sinh u \sinh(u - \eta), \quad (3.45)$$

$$g = \rho \sinh 2\eta \sinh u. \quad (3.46)$$

Тогда $\Delta = \cos \eta$, и трансфер - матрица коммутирует при различных значениях u , ρ (и одинаковым η) коммутативность при различных ρ тривиальна, поскольку общий множитель просто выносится и ни на что не влияет. Удобно положить $\rho=1$, тогда:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}. \quad (3.47)$$

Параметр u называется спектральным параметром и R - матрица, а также все остальные введенные объекты обычно рассматриваются как функции параметра u : $R=R(u), T=T(u)$. При этом означает, что u может меняться, а η фиксировано, тогда $[T(u), T'(u)] = 0$:

$$R_{12}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3) R_{13}(u_1 - u_3) R_{12}(u_1 - u_2). \quad (3.48)$$

"Сплетающее соотношение" $PR''(\tau \otimes \tau') = (\tau' \otimes \tau)PR''$ в теории интегрируемых моделей статистической физики на двумерной решетке, а также интегрируемых моделей физики твердого тела и теории поля. С алгебраической точки зрения оно задает коммутационные соотношения между генераторами бесконечномерной алгебры (квантовой аффинной алгебры), порождаемой коэффициентами разложения матричных элементов матрицы $\tau(u)$ по u . Уравнение Янга - Бакстера эквивалентно ассоциативности этой алгебры, а реализация сплетающего соотношения для десятивершинной модели матрицами Больцмановских весов означает выбор ее специального конечномерного представления [157].

Связь с XXZ - моделью основана на том факте, что гамильтониан последней содержится в семействе трансфер - матриц десятивершинной модели $T(u)$

$$H^{XXZ} = -\sinh \eta \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0} + N \sinh \eta. \quad (3.49)$$

Гамильтониан цепи полуцелого спина XXZ - цепочки получен из матрицы переноса модели из десяти вершин. Эта вершинная модель определяется в терминах весов Больцмана, заданных R - матрицей представления полуцелого спина. Это тригонометрическое решение уравнение Янга-Бакстера:

$$\check{R}(u - u')(\tau(u) \otimes \tau'(u')) = (\tau(u') \otimes \tau(u))\check{R}(u - u'), \quad (3.50)$$

где $\check{R}(u) = PR(u)$, а P - матрица - перестановки: $R(u)$ матрица 5×5 десяти вершин с ненулевыми значениями:

$$\check{R}(u) = PR(u) = \begin{pmatrix} a(u) & g(u) & & & d(u) \\ & c(u) & b(u) & b(u) & \\ & b(u) & c(u) & c(u) & \\ & & b(u) & c(u) & c(u) \\ d(u) & & & g(u) & a(u) \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Итак, выяснено важность соотношения, что если существует $T'T = TT'$. Ранее написано уравнение Янга - Бакстера и надо найти его решение. Приводится основное свойство решения этого уравнения. Таким образом, пусть имеется параметр u_i , тогда обозначим R

$$R = R(u_1 - u_2), \quad R' = R(u_1 - u_3), \quad R'' = R(u_2 - u_3). \quad (3.52)$$

Для удобства решения укажем явный вид R - матрицы [154]

$$R(u) = \begin{pmatrix} a(u) & g(u) & & & d(u) \\ & c(u) & b(u) & b(u) & \\ & b(u) & c(u) & c(u) & \\ & & b(u) & c(u) & c(u) \\ d(u) & & & g(u) & a(u) \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$R''_2 L'_2 L_1 = L_1 L'_2 R''_2$ - RLL - соотношение Янга - Бакстера, где L - матрица монодромии [154]

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$R_{12}(u_1 - u_2) L_2(u_2) L_1(u_1) = L_1(u_1) L_2(u_2) R_{12}(u_1 - u_2). \quad (3.55)$$

С помощью RLL - соотношения Янга - Бакстера можно написать уравнения коммутации операторов матрицы - монодромии с R - матрицей больцмановских весов

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2) B(u_1) A(u_2) &= c(u_1 - u_2) B(u_2) A(u_1) + b(u_1 - u_2) A(u_2) B(u_1) + d(u_1 - u_2) B(u_2) A(u_1) + g(u_1 - u_2) A(u_2) B(u_1) \\ a(u_2 - u_1) B(u_1) D(u_2) &= c(u_2 - u_1) B(u_2) D(u_1) + b(u_2 - u_1) D(u_2) B(u_1) + d(u_2 - u_1) B(u_2) D(u_1) + g(u_2 - u_1) D(u_2) B(u_1) \\ a(u_1 - u_2) C(u_1) A(u_2) &= c(u_1 - u_2) C(u_2) A(u_1) + b(u_1 - u_2) A(u_2) C(u_1) + d(u_1 - u_2) C(u_2) A(u_1) + g(u_1 - u_2) A(u_2) C(u_1) \\ a(u_2 - u_1) C(u_1) D(u_2) &= c(u_2 - u_1) D(u_1) D(u_1) + b(u_2 - u_1) D(u_2) C(u_1) + d(u_2 - u_1) C(u_2) D(u_1) + g(u_2 - u_1) D(u_2) C(u_1) \\ d(u_1 - u_2) A(u_1) B(u_2) &= a(u_1 - u_2) A(u_2) B(u_1) + b(u_1 - u_2) B(u_2) A(u_1) + c(u_1 - u_2) A(u_2) B(u_1) + g(u_1 - u_2) B(u_2) A(u_1) \\ d(u_2 - u_1) A(u_1) C(u_2) &= a(u_2 - u_1) A(u_2) C(u_1) + b(u_2 - u_1) C(u_2) A(u_1) + c(u_2 - u_1) A(u_2) C(u_1) + g(u_2 - u_1) C(u_2) A(u_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& , d(u_1 - u_2)D(u_1)C(u_2) = a(u_1 - u_2)D(u_2)C(u_1) + b(u_1 - u_2)C(u_2)D(u_1) + c(u_1 - u_2)D(u_2)C(u_1) + g(u_1 - u_2)C(u_2)D(u_1) \\
& , d(u_2 - u_1)D(u_1)B(u_2) = a(u_2 - u_1)D(u_2)B(u_1) + b(u_2 - u_1)B(u_2)D(u_1) + c(u_2 - u_1)D(u_2)B(u_1) + g(u_2 - u_1)B(u_2)D(u_1) \\
& , d(u_1 - u_2)A(u_1)D(u_2) = a(u_1 - u_2)A(u_2)D(u_1) + b(u_1 - u_2)D(u_2)A(u_1) + d(u_1 - u_2)A(u_2)D(u_1) + g(u_1 - u_2)D(u_2)A(u_1) \\
& , c(u_2 - u_1)D(u_1)A(u_2) = a(u_2 - u_1)D(u_2)A(u_1) + b(u_2 - u_1)A(u_2)D(u_1) + d(u_2 - u_1)D(u_2)A(u_1) + g(u_2 - u_1)A(u_2)D(u_1) \\
& , c(u_1 - u_2)B(u_1)C(u_2) = a(u_1 - u_2)B(u_2)C(u_1) + b(u_1 - u_2)C(u_2)B(u_1) + d(u_1 - u_2)B(u_2)C(u_1) + g(u_1 - u_2)C(u_2)B(u_1) \\
& , c(u_2 - u_1)C(u_2)B(u_1) = a(u_2 - u_1)C(u_2)B(u_1) + b(u_2 - u_1)B(u_2)C(u_1) + d(u_2 - u_1)C(u_2)B(u_1) + g(u_2 - u_1)B(u_2)C(u_1)
\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(u) = R(u)P &= \begin{pmatrix} a(u) & g(u) & & & d(u) \\ & c(u) & b(u) & b(u) & \\ & b(u) & c(u) & c(u) & \\ & b(u) & c(u) & c(u) & \\ d(u) & & & g(u) & a(u) \end{pmatrix} = \\
& \sinh \eta + \begin{pmatrix} \rho \sinh(u - \eta) & \rho \sinh 2\eta \sinh u & & & \rho \sinh u \sinh(u - \eta) \\ & \rho \sinh \eta & \rho \sinh u & \rho \sinh u & \\ & \rho \sinh u & \rho \sinh \eta & \rho \sinh \eta & \\ & \rho \sinh u & \rho \sinh \eta & \rho \sinh \eta & \\ \rho \sinh u \sinh(u - \eta) & & & \rho \sinh 2\eta \sinh u & \rho \sinh(u - \eta) \end{pmatrix}, \quad (3.56) \\
& = \begin{pmatrix} \rho \sinh(u - \eta) & \rho \sinh u \sigma_z \\ \rho \sinh \eta & \rho \sinh(u - \eta) \\ \rho \sinh u \sigma_z & \rho \sinh(u - \eta) \end{pmatrix} = \sinh \eta - (h + \text{const})\eta + Q(1).
\end{aligned}$$

Где

$$h = -\frac{1}{2}(\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y - \sinh \eta \sigma^z \otimes \sigma^z). \quad (3.57)$$

Утверждение состоит в том, что в квантовом пространстве H_1 (3.49) равна гамильтониану XXZ - модели Гейзенберга

$$T^{-1}(0)T(u) = 1 - H_1 u - \frac{H_2 u^2}{2} - \frac{H_3 u^3}{3} - \dots \Rightarrow H_1 = H_{XXZ}, \quad (3.58)$$

так, из того что трансфер - матрица образует семейство учитывают, что $T(u_1)T'(u_2) = T(u_2)T'(u_1)$ - все они коммутируют.

Имеется бесконечное число интегралов движений коммутирующих с трансфер - матрицей $H_1 = H_{XXZ}$ - эта модель имеет коммутирующие интегралы движения:

$$H_0 = T(0). \quad (3.59)$$

Можно найти решение этого уравнения другим способом, для этого достаточно ввести вакуум равный псевдовакууму, которое есть состояние всех N спинов вверх $|\Omega_+\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle$ - собственное состояние трансфер матрицы.

Построив состояние $|\Omega_+\rangle$ трансфер матрицы, находят собственное состояние оператора квантовой матрицы монодромии, причем оно удовлетворяет следующим решениям:

$$A(u)|\Omega_+\rangle = a(u)|\Omega_+\rangle, \quad (3.60)$$

и каждого элемента данной матрицы в пространстве \mathbb{H}

$$D(u)|\Omega_+\rangle = b^N|\Omega_+\rangle, \quad (3.61)$$

$$C(u)|\Omega_+\rangle = \sum_{n=1}^N a(u)^{N-n} c(u) b(u) d(u)^{n-1} |\Omega_+\rangle, \quad (3.62)$$

где $C(u)$ и $D(u)$ - элементы квантовой матрицы монодромии.

Используя параметризацию (3.46) можно найти собственное значение трансфер матрицы

$$T(u)|\Omega_+\rangle T(u)|\Omega_+\rangle = A(u) + D(u) = a^N(u) + b^N(u) |\Omega_+\rangle, \quad (3.63)$$

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_{n=1}^N g(u)^{N-n} b(u) c(u)^{n-1} |\Omega_+\rangle = \frac{g(u)^{N-n} b(u)}{c(u)^{n-1}} \left(\frac{c(u)}{g(u)} \right)^n \sigma_n^- |\Omega_+\rangle, \quad (3.64)$$

$$\frac{b(u)}{a(u)} = e^{ip}, \quad \sum_{n=1}^N e^{ipn} \sigma_n^- |\Omega_+\rangle, \quad \sum_{m < n} a_{m+n} \sigma_m^- \sigma_n^- |\Omega_+\rangle, \quad (3.65)$$

где $a_{m,n}$ - плоские волны по индексам m и n , эта функция устроена также, как функция Бете для двух частиц.

3.3 Исследование связи десятивершинной модели с полиномом Джонса

Из предыдущего параграфа следует о новых связях больцмановских весов с теорией узлов, что представляет собой коммутационные соотношения между генераторами бесконечной квантовой алгебры.

Однако, несмотря на свою простоту и пользу, связь инвариантов узлов со статистической механикой остается в значительной степени неизвестной темой для физиков. Решеточные модели – это математические модели физических систем, определенные на решетках. В то время как в реальном мире мы имеем дело с регулярными решетками бесконечного размера, многие результаты по моделям решеток также справедливы для произвольных конечных решеток. Именно эти последние результаты полезны в теории узлов. В решеточных моделях является интересным вычисление статистической суммы:

$$Z = \sum W, \quad (3.66)$$

где суммирование берется по всем спином (или ребру) состояния, а w – фактор Больцмана, определенный для каждой конфигурации спиновых (или граничных) состояний. В вершинных моделях больцмановский вес в формуле (3.66) берется как произведение весов отдельных вершин, а статистическая сумма записывается в виде:

$$Z_{\text{вершины}}(\omega) = \sum_{\{\text{на ребре}\}} \prod_{i=1}^N \omega_i, \quad (3.67)$$

где ω_i , вес i -й вершины, являющийся функцией спиновых состояний его четырех смежных ребер.

Факторы Больцмана обычно носят локальный характер, то есть они могут разлагаться на произведение факторов, каждый из которых зависит от состояния нескольких спинов (ребер), расположенных в непосредственной близости. В статистической механике дополнительно вычисляются термодинамические свойства путем взятия производной статистической суммы для бесконечных решеток. Однако в теории узлов речь идет в основном о статистической сумме. Метод получения инвариантов узлов с использованием статистической механики заключается в следующем: для каждого данного узла строится двумерная решетка. Затем нужно построить решеточные модели на решетке так, чтобы статистическая сумма была идентична для решеток, построенных из эквивалентных узлов. Тогда по определению статистическая сумма является инвариантом узла [110].

В параграфе представлена общая теория построения полинома узла из десятивершинной модели. Кроме того, показан общий принцип работы создания представления группы кос из больцмановских весов, удовлетворяющих соотношению Янга-Бакстера, которое аналогично тринейному соотношению, появляющийся в контексте интегрируемых вершинных моделей с использованием узла пятилистника. Более того, рассмотрена статистическая механическая модель с целью построения представления группы кос. Это позволяет непосредственно вычислять полином узла, постулируя подходящую операцию взятия следа на элементах группы кос, которые остаются неизменными при марковских движениях. Следовательно, объясняется матричное представление генераторов кос из десятивершинной модели. В результате изложены существенная особенность узла и вычисление полинома пятилистника. Используя веса Больцмана, соответствующие десятивершинной модели, рассмотрено представление группы кос и построение полинома Джонса.

3.3.1 Узлы из кос

Узлы могут быть построены из заплетенных кос. Возьмем n одинаковых частиц на плоскости, между i -й и $i+1$ -частицами которых существуют две независимые частицы [119, 1-17]. В действительности, замены по часовой и против часовой стрелки обозначены стрелкой вверх и вниз соответственно.

Математически, узлы из кос мы обозначим как b_i по часовой стрелке и обратным элементом b_i^{-1} для замены против часовой стрелки. Любая произвольная замена задается выражением, содержащим b_i и их обратные. Эти b_i называют генераторами группы B_n , обычно известной как группа кос. Все выражения в косе не являются независимыми и подчиняются следующим определяющим отношениям:

$$b_i b_j = b_j b_i \text{ если } |i - j| > 1, \quad b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}. \quad (3.68)$$

Узлы могут быть получены из кос путем идентификации начального состояния n идентичных частиц перед заменой, с конечным состоянием этих частиц после замены (также известного как замыкание), что обозначают как взятие следа операции кос. Далее будут рассмотрены представления группы кос из вершинной модели и формулы, позволяющей вычислять инварианта узла [111].

3.3.2 Вершинная модель

Исследуем построение представления группы кос из больцмановских весов десятивершинной модели. Для полноты приведем в таблице 1 ненулевые больцмановские веса для этой модели после наложения симметрии (справедливой в отсутствие внешнего поля) $\omega(\mu_1 \alpha_1 | \beta_1 \mu_2) = \omega(-\mu_1, -\alpha_1 | -\beta_1, -\mu_2)$,

Таблица 1 – Ненулевые больцмановские веса

$\mu_1 \alpha_1 / \beta_1 \mu_2$	++	- +	+ -	+ -	--
++	a	g	0	0	d
- +	0	c	b	b	0
+ -	0	b	c	c	0
+ -	0	b	c	c	0
- -	d	0	0	g	a

где задана явная форма a, b, c, d, g с точки зрения энергий ε_i при температуре $T = \frac{\beta^{-1}}{k_B}$, k_B – постоянная Больцмана

$$\omega_1 = (++) = \omega_2(--) = a = \exp(-\varepsilon_1 \beta), \quad (3.69)$$

$$\omega_3 = (-+) = \omega_4(+ -) = b = \exp(-\varepsilon_2 \beta), \quad (3.70)$$

$$\omega_5 = (+ -) = \omega_6(- +) = c = \exp(-\varepsilon_3 \beta), \quad (3.71)$$

$$\omega_7 = (++) = \omega_8(--) = d = \exp(-\varepsilon_4 \beta), \quad (3.72)$$

$$\omega_9 = (-++) = \omega_{10}(+ -) = g = \exp(-\varepsilon_5 \beta). \quad (3.73)$$

Формально статистическая сумма Z , описывающая вершинную модель, будет иметь вид

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} ,$$

где i – это суммирование по всем возможным конфигурациям спиновых состояний $\pm \frac{1}{2}$ на ребрах;

E_i – энергия i -й конфигурации. Эквивалентно, можно ввести трансфер-матрицу $V_{\alpha\beta}$ в строку

$$V_{\alpha\beta} = \sum_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} \omega(\mu_1 \alpha_1 | \beta_1 \mu_2) \omega(\mu_2 \alpha_2 | \beta_2 \mu_3)$$

переписать Z как

$$Z = \sum_{\alpha_1^1 \alpha_2^1 \dots \alpha_N^1} V \alpha_1^1 \alpha_2^1 V \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots V \alpha_{N-1}^1 \alpha_N^1 = \text{Tr}(V^N) = \lambda_{\max}^N ,$$

где λ – максимальное собственное значение трансфер-матрицы V . Попытка найти собственные векторы и собственные значения матрицы переноса показывает, что больцмановские веса параметризуются следующим образом [101]

$a : b : c : d : g = \sinh(\lambda - u) : \sinh(\lambda) : \sinh(\lambda + u) : \sin(\lambda) \sinh(u - \lambda) : \sinh(2\lambda) \sinh(u)$, где решения для собственных векторов зависят от

$$\Delta = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)}{(2ac)} = -\cosh(\lambda) . \quad (3.74)$$

Это дает свободу выбора в бесконечном числе трансфер-матрицы $V(u)$, параметризованных u , имеющих одинаковые собственные векторы. Параметр u обычно называют спектральным параметром. Эквивалентно, можно заметить, что существует бесконечное семейство коммутирующих трансфер-матриц:

$$V(u)V(v) = V(v)V(u) . \quad (3.75)$$

Вышеупомянутое коммутативное условие на трансфер-матрице учитывает соотношение треугольника, включающее больцмановские веса [90], известное как уравнение Янга-Бакстера

$$X_{i+1}(u)X_i(u+v)X_{i+1}(v) = X_i(v)X_{i+1}(u+v)X_i(u) , \quad (3.76)$$

где $X_i(u)$ – оператор Янга-Бакстера, в терминах больцмановских весов

$$(X_i)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \dots \omega(\alpha_1, \alpha_{i+1} | \beta_1 \beta_{i+1}) \delta_{\alpha_{i+2}\beta_{i+2}} \dots$$

Интересно, что уравнение Янга-Бакстера (3.76) напоминает соотношение групп кос (3.68), если убрать зависимость от спектрального параметра. Нам нужно взять подходящий предел спектральных параметров и проверить, приближается ли оператор Янга-Бакстера к конечному значению. Взяв предел $u, v, u+v \rightarrow \infty$ для оператора Янга-Бакстера $X_i(u)$, нам нужно получить конечный оператор

$$\lim_{u \rightarrow \infty} X_i(u) = b_i,$$

где b_i – генератор группы кос. Чтобы достичь такого конечного оператора b_i , мы выполняем следующую асимметризацию на весах Больцмана

$$\tilde{\omega}(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1 \beta_2) = \exp\{\mu(\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_1 + \beta_2)\} \omega(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1 \beta_2), \quad (3.77)$$

что удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (3.76). Выберем подходящий параметр для того, чтобы получить конечное число b_i , поскольку спектральный параметр стремится к бесконечности. В таблице 2 показаны новые больцмановские веса $\tilde{\omega}(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1 \beta_2)$, полученные с использованием условия асимметризации.

Таблица 2 – Новые больцмановские веса при использовании условий асимметризации

$\alpha_1 \alpha_2 / \beta_1 \beta_2$	++	- +	+-	+-	--
++	a	g	0	0	d
- +	0	c	\tilde{c}_2	\tilde{c}_2	0
+-	0	\tilde{c}_1	c	c	0
+-	0	\tilde{c}_1	c	c	0
--	d	0	0	g	a

Здесь $\tilde{c}_1 = b \exp\{-2\mu\}$, $\tilde{c}_2 = b \exp\{2\mu\}$. Принимая $u \rightarrow \infty$, $\mu = \frac{1}{2}$ и $\exp(2\lambda) = q$ подходящую нормировку, получим следующий конечный предел для весов Больцмана:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\omega(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1 \beta_2)}{\omega(++ | ++)} = \sigma(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1 \beta_2),$$

который приведен в матрице ниже

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \setminus \beta_1 \beta_2 & ++ & -+ & +- & +- & -- \\ -+ & 1 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^2}) & 0 & 0 & \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} \\ +- & 0 & 0 & \sqrt{q} & \sqrt{q} & 0 \\ +- & 0 & \sqrt{q} & -1+q & -1+q & 0 \\ +- & 0 & \sqrt{q} & -1+q & -1+q & 0 \\ -- & \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^2}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Вышеприведенная матрица 5×5 удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sigma^2 = (1-q)\sigma + q. \quad (3.78)$$

Можно определить генераторы кос b_i , включающие σ - матрицы

$$b_i = \lim_{u \rightarrow 0} X_i(u) = I \otimes I \dots \otimes I_{i-1} \otimes \sigma_{5 \times 5} \otimes I_{i+2} \otimes \dots \quad (3.79)$$

Из приведенных выше двух уравнений можно вывести

$$b_i^2 = (1-q)b_i + qI,$$

применяя это отношение к любому пересечению узла, нарисованного как закрытие косы, воспроизведем скейн-соотношение

$$a^{-1}P(K_+) - a(K_-) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})P(K_0), \quad (3.80)$$

дающее полином Джонса. До сих пор мы рассмотрели вывод матричного представления для генератора группы кос из больцмановских весов десятивершинной модели. Мы хотели бы попытаться напрямую построить полиномиальный инвариант для узла, не прибегая к подходу связывания кос. В основном, алгебраическая формула для узлов, полученные из кос, должна быть написана так, чтобы формула не изменялась, когда мы выполняем марковские движения I и II. Для выражения кос $A \in B_n$ следующая алгебраическая формула $\alpha(A)$ учитывает марковские движения и, следовательно, может называться инвариантом узла [73]

$$\alpha(A) = (\tau\bar{\tau})^{-(n-1)} \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\binom{e}{2}} \phi(A), \quad (3.81)$$

где e – сумма экспоненциальной суммой числа b_i , используемого в выражении кос A , $\tau = \frac{1}{(1+q)}$, $\bar{\tau} = \frac{q}{(1+q)}$ и $\phi(A)$ след Маркова. Он может быть вычислен как

$$\phi(A) = \text{Tr}\{HA\}, \quad (3.82)$$

где H - тензорное произведение 5×5 матрицы h

$$H = \underbrace{h \otimes h \otimes h \otimes \dots \otimes h}_n$$

с элементами матрицы h записываемыми следующим образом

$$h = \frac{1}{1+q+q^2+q^3+q^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Полином узла

Изучим и сравним полином некоторого узла, к примеру как в теории узлов, известных как «печать Соломона» или пятилистник, получаемых при закрытии двухниточной косы. Таким образом, у нас будет только генератор $b_1 \in B_{n=2}$ для вычисления $\alpha(A)$, где $A \in B_{n=2}$. Для группы кос B_2 , $b_1 \equiv \sigma$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^2}) & 0 & 0 & \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} \\ 0 & 0 & \sqrt{q} & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & -1+q & -1+q & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & -1+q & -1+q & 0 \\ \frac{-1+q}{2\sqrt{q}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\sqrt{q+q^2}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Для пятилистника, выражение для косы определяется из b_1^5 , тогда $e=5$. В этом случае возможно записать матрицу определяющую выражения для косы b_1^5 . Умножим матрицу b_1^5 на $H = h \otimes h$, где диагональные элементы равны

$$H_{ii} = \left\{ \frac{1}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^2}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^3}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^4}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \right. \\ \frac{q}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^2}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^3}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^4}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^5}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \\ \frac{q^2}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^3}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^4}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^5}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^6}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \\ \frac{q^3}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^4}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^5}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^6}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^7}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \\ \left. \frac{q^4}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^5}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^6}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^7}{(1+q^2+q^3+q^4)^2}, \frac{q^8}{(1+q^2+q^3+q^4)^2} \right\} \\ H_{ij} = 0, \text{ где } H_{ii} = \{H_{11}, H_{22}, H_{33}, \dots, H_{2525}\}.$$

Тензорное произведение h даст матрицу 25×25 , след которой даст $\phi(b_1^5)$. В результате получено выражение полинома Джонса для узла типа пятилистник

$$\alpha(b_1^5) = -q^2 + 3q^3 - 3q^4 + q^5. \quad (3.83)$$

Выводы по третьему разделу:

– в первом подразделе вычислена восьмивершинная модель с использованием анзаца Бете, что после использования уравнений доказательства интегрируемости получена точное решение системы. Выяснено, что элементарное возбуждение является бесщелевым, если анизотропный параметр является действительным, в то время как элементарное возбуждение имеет разрыв, если анизотропный параметр является мнимым. В этом представлении компоненты собственных состояний Бете выражаются в виде следов произведений матриц, действующих на тензорное произведение вспомогательных пространств. Также изучены основное состояние и элементарные возбуждения. Показано, что спиновое возбуждение данной модели обладает новой тройной дугообразной структурой;

– во втором подразделе представлена трансфер - матрица больцмановских весов десятивершинной модели построенная методом параметризации, вычислены собственное состояние и значение трансфер R - матрицы теории интегрируемости квантовой системы в трехмерном пространственном измерении. Из R - матриц выводятся общие интегрируемые граничные слагаемые для XXZ - цепочки Гейзенберга с полуцелым спином. Найдена связь между уравнениями Янга - Бакстера и XXZ - цепочкой Гейзенберга для трехмерного пространства. С помощью RLL - соотношения Янга - Бакстера и квантовой матрицы монодромии получены уравнения, из которых следует коммутация операторов между собой. Методом параметризации построена трансфер - матрица больцмановских весов десятивершинной модели, используя операторы квантовой матрицы монодромии, вычислены собственное состояние и собственное значение трансфер - матрицы. Представлена новая интегрируемая анизотропная модель спиновой цепочки $J_x = J_y \neq J_z$ с дополнительными скалярными членами киральности. Получено точное решение десятивершинной

модели, основное состояние и новая структура элементарного спектра возбуждения. По сравнению с состояниями матричного произведения той же цепочки Гейзенберга, но с периодическими граничными условиями, размерность точных вспомогательных матриц увеличивается, как если бы рассматриваемое консервативное число переворотов спина было бы удвоено. В результате изучена десятивершинная модель с наиболее общим интегрируемым граничным условием, которое описывается гамильтонианом, и соответствующие интегрируемые граничные члены связаны с наиболее типичным диагональным R - матрицей, заданный спектральными параметрами, которые являются функцией Больцмановских весов a, b, c, d, g ;

– в третьем подразделе исследовано построение представления группы кос с использованием коэффициентов весов Больцмана десятивершинной модели N – состояний. Изучено матричное представление генераторов кос из десятивершинной модели. Используя алгебраическую формулу (3.81) для инвариантов узлов, вычислен полином Джонса для узла b_1^5 . Исследована связь между инвариантами теории узлов и десятивершинной моделью статистической механики, с использованием перехода коммутирующей трансфер-матрицы, включающей Больцмановские веса в матрицу кос.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации содержатся новые, научно обоснованные теоретические результаты, являющиеся итогом достижения основной цели и решения поставленных задач. Совокупность полученных результатов имеют значение для развития представлений о связи вершинных моделей с теорией узлов, основанных на фермионных и бозонных моделях статистической механики без внешнего поля и спиновых узлах, где инвариант узла определяет статистическую сумму модели термодинамическом пределе.

По результатам диссертационной работы можно сделать следующие **выводы:**

1. Реконструирована новая восьмивершинная модель путем параметризации каждого ненулевого элемента больцмановских весов с применением эллиптических функций. Изучена характеристика генераторов кос спинового узла в таблице Рольфсена, используя теорему Маркова и движения Рейдмейстера. Исследована и получена новая R - матрица трехчастичной вершинной модели узла с разноцветными зацеплениями из представлений группы кос, полученных алгоритмом Фогеля и вычислен инвариант, пропорциональный разноцветному полиному Джонса.

2. Исследован ряд решений уравнения Замолотчикова для восьмивершинной и шестивершинной моделей на простой квадратной решетке. В разделах рассматриваются отдельные случаи решения, когда R - матрица не имеет ненулевых элементов в поле простых чисел и появляются новые типы решений, не существующие в стандартном случае, завершить 8 - вершинные и 6 - вершинные решения.

3. Рассчитана восьмивершинная модель с использованием анзаца Бете и точное решение системы было получено после применения уравнений для доказательства интегрируемости. Обнаружена связь между уравнениями Янга-Бакстера и последовательностью Гейзенберга для трехмерного пространства. Методом параметризации построена трансфер - матрица больцмановских весов десятивершинной модели, собственное состояние и собственное значение трансфер - матрицы вычислены с помощью квантовых монодромных матричных операторов. Рассмотрена десятивершинная модель, образованная в результате модификации интегрируемой восьмивершинной модели с фермионным переходом. Вычислен полином Джонса десятивершинной модели, имеющая одинаковые спины состояний на ребрах при пересечении вершины.

Благодарности

Выражаю искренне благодарность своему научному руководителю доктор PhD, и.о. доцента Петру Юрьевичу за постановку задачи, руководство и всестороннюю поддержку в период выполнения данной работы. Также выражаю огромную благодарность своему зарубежному консультанту профессору Дугласу Синглетону за плодотворную совместную работу и консультации во время моего визита в Департамент физики Калифорнийского государственного университета (Фресно, США). Также выражаю благодарность сотрудникам Евразийского международного центра теоретической физики и кафедры Общая и теоретическая физика за полезные обсуждения, помощь и за создание отличной рабочей атмосферы при выполнении данной диссертационной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Flapan E. When topology meets chemistry: A topological look at molecular chirality. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – P. 241.
- 2 Collins G. Computing with Quantum Knots // *Scientific American*. – 2006. – Vol. 294, №4. – P. 56-63.
- 3 Bar-Natan D., Stoimenow A. The Fundamental Theorem of Vassiliev Invariants // *Geometry and physics*. – 1997. – P. 34.
- 4 Bar-Natan D. On the Vassiliev knot invariants // *Topology*. – 1995. – Vol. 34, №2. – P. 423-472.
- 5 Lopez A., Fradkin E. Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories // *Phys Rev B Condens Mat*. – 1991. – Vol. 44, №10. – P. 5246-5262.
- 6 Hass J. Algorithms for recognizing knots and 3-manifolds // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 1998. – Vol. 9, №4-5. – P. 569-581.
- 7 Hoste J. The enumeration and classification of knots and links // In book: *Handbook of Knot Theory*. – NY., 2005. – Ch. 5. – P. 209-232.
- 8 Sossinsky A. *Knots: mathematics with a twist*. – Cambridge: Harvard University Press, 2002. – P. 168.
- 9 Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial // *Comm. Math. Phys*. – 1989. – Vol. 121, №3. – P. 351-399.
- 10 Witten Ed. Topological quantum field theory // *Commun. Math. Phys*. – 1988. – Vol. 117. – P. 353-386.
- 11 Witten Ed Topological sigma models // *Commun. Math. Phys*. – 1988. – Vol. 118. – P. 411-449.
- 12 Turaev V.G. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. – Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1994. – P. 588.
- 13 Gukov S., Kapustin A. *Topological Quantum Field Theory, Nonlocal Operators, and Gapped Phases of Gauge Theories* // <https://arxiv.org/pdf.04.08.2021>.
- 14 Segal G. Topological structures in string theory // *Phil. Trans. R. Soc. Lond*. – 2001. – Vol. 359. – P. 1389-1398.
- 15 Lurie J. *On the Classification of Topological Field Theories*. – Washington, 2009. – P. 111.
- 16 Atiyah M.F. Topological quantum field theory // *Publications mathématiques de l'I.H.É.S*. – 1988. – Vol. 68. – P. 175-186.
- 17 Jones V.F.R. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras // *Bull. Am. Math. Soc*. – 1985. – Vol. 12. – P. 103-112.
- 18 Temperley H.N.V., Lieb E.H. Relations between the percolation and colouring problem and other graph theoretical problems associated with regular planar lattice: some exact results for the percolation problem // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1971. – Vol. 322. – P. 251-280.
- 19 Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial // *Topology*. – 1987. – Vol. 26. – P. 395-407.
- 20 Jones V.F.R. On knot invariants related to some statistical mechanical models // *Pacific J. Math*. – 1989. – Vol. 137. – P. 311-334.

- 21 Wadati M., Deguchi T., Akutsu Y. Exactly solvable models and knot theory // *Phys. Rep.* – 1989. – Vol. 180, Issue 4-5. – P. 247-332.
- 22 Gepner D. Foundations of rational conformal field theory // <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9211100.pdf>. 04.08.2021.
- 23 Levis D. Two-dimensional spin ice and the sixteen-vertex model. – Paris, 2012. – Ver. 1. – P. 207.
- 24 Cai J.-Y., Fu Zh. Complexity Classification of the Eight-Vertex Model // <https://arxiv.org/pdf/1702.07938v2.pdf>. 04/08.2021.
- 25 Jin X., Zhang F. Jones polynomials and their zeros for a family of links // *Physica A.* – 2004. – Vol. 333. – P. 183-196.
- 26 Gepner D. B_k spin vertex models and quantum algebras // *Nuclear Physics B.* – 2020. – Vol. 958. – P. 115-116.
- 27 Maillard J.-M. Fa-Yueh Wu's contributions in physics // *Physica A.* – 2003. – Vol. 321. – P. 28-44.
- 28 Yang C.N., Ge M.L. Braid Group, knot theory and statistical mechanics. – Singapore: World sci., 1989. – P. 452.
- 29 Jones V. A polynomial invariants of knots via von Neumann algebras // *Bull. Amer. Math.* – 1985. – Vol. 12. – P. 103-111.
- 30 Kassenova T.K., Tsyba P.Yu., Razina O.V. et al. Three-partite vertex model and knot invariants // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* – 2022. – Vol. 597. – P. 127-283.
- 31 Belavin V., Gepner D., Wenzl H. On (N) spin vertex models // *Nuclear Physics B.* – 2020. – Vol. 959. – P. 115-160.
- 32 Kaul R.K. The representations of Temperley-Lieb-Jones algebras // *Nuclear Physics B.* – 1994. – Vol. 417. – P. 267-285.
- 33 Deguchi T., Wadati M. et al. Knot Theory based on Solvable Models at Criticality // *Advanced Studies in Pure Mathematics.* – 1989. – Vol. 19. – P. 193-285.
- 34 Baxter R.J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. – London: academic Press, 1982. – P. 486.
- 35 Kassenova T.K., Tsyba P.Yu., Razina O.V. Eight-vertex model over Grassmann algebra // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2019. – Vol. 1391, 012035.
- 36 Kaul R.K., Govindarajan T.R. Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links (II). Multicoloured links // *Nuclear Physics B.* – 1993. – Vol. 393. – P. 392-412.
- 37 Kaul R.K., Ramadevi P. Three-Manifold Invariants from Chern–Simons Field Theory with Arbitrary Semi-Simple Gauge Groups // *Commun. Math. Phys.* – 2001. – Vol. 217. – P. 295-314.
- 38 Kaul R.K. Chern-Simons Theory, Coloured-Oriented Braids and Link Invariants // *Commun. Math. Phys.* – 1994. – Vol. 162. – P. 289-319.
- 39 Kassenova T.K. Parametrized eight-vertex model and knot invariant 10_{136} // *Eurasian Phys. Tech. Journ.* – 2022. – Vol. 19, №1(39). – P. 119-126.

- 40 Jucys A., Bandzaitis A. The theory of angular momentum in quantum mechanics // Academy of Sciences of the Lithuanian SSR Institute of Physics and Mathematics publication. – 1965. – Vol. 6. – P. 531.
- 41 Березин Ф.А. Лекции по статистической физике. – Изд. 2-е, испр. – М.: МЦНМО, 2008. – С. 198.
- 42 Murasugi K. Knot Theory and Its Applications. – Boston, 1996. – P. 341.
- 43 Gaudin M. La fonction d'onde de Bethe. – NY.: Masson, 1983. – P. 330.
- 44 Hill T.L. Statistical Mechanics: Principles and Selected Applications. – NY., 1987. – P. 464.
- 45 Stroganov Y. Tetrahedron equation and spin integrable models on a cubic lattice // Theoret. Math. Phys. – 1997. – Vol. 110, №2. – P. 141-167.
- 46 Yang C.N., Ge M.L. Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics // World Scientific Publishing. – 1989. – Vol.17. – P.452.
- 47 Adams C. The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots. – Providence: American Mathematical Society, 2004. – P. 306.
- 48 Ekholm T., Lenhard N., Sullivan M.G. Knot contact homology // Geom. Topol. – 2013. – Vol. 17. – P. 975-1112.
- 49 Sawollek J. An orientation-sensitive Vassiliev invariant for virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. – 2003. – Vol. 12, №6. – P. 767-779.
- 50 Bartholomew A., Fenn R. Quaternionic invariants of virtual knots and links // J. Knot Theory Ramifications. – 2008. – Vol. 17, №2. – P. 231-251.
- 51 Chang S.-C., Shrock R. Zeros of Jones polynomials for families of knots and links // Physica A. – 2001. – Vol. 301. – P. 196-218.
- 52 Birman J.S., Brendle T. Braids: a survey // <https://arxiv.org/pdf.06.08.2021>.
- 53 Kamada S. Braid presentations of virtual knots and welded knots // Osaka J. Math. – 2007. – Vol. 44, №2. – P. 441-458.
- 54 Kauffman L. A. Self-Linking Invariant of Virtual Knots // <https://homepages.math.uic.edu/~kauffman/SelfLink.pdf>. 06.08.2021.
- 55 Kauffman L.H., Lambropoulou S., Jablan S. Introductory Lectures on Knot Theory: Selected Lectures Presented at the Advanced School and Conference on Knot Theory and Its Applications to Physics and Biology // World Scientific. – 2011. – Vol. 46. – P. 407-441.
- 56 Siwach V., Madeti P. Region unknotting number of 2-bridge knots // J. Knot Theory Ramifications. – 2015. – Vol. 24, №11. – P. 1-20.
- 57 Dye H.A., Kauffman L.H. Virtual crossing number and the arrow polynomial // J. Knot Theory Ramifications. – 2009. – Vol. 18, №10. – P. 1335-1357.
- 58 Fenn R., Jordan-Santana R., Kauffman L.H. Biquandles and virtual links // Topology Appl. – 2004. – Vol. 145, №1. – P. 157-175.
- 59 Jeong M.-J. A zero polynomial of virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. – 2015. – Vol. 24, №19. – P. 5.
- 60 Cheng M.-J. A transcendental function invariant of virtual knots // J. Math. Soc. Japan. – 2017. – Vol. 69, №4. – P. 1583-1599.
- 61 Cheng Z., Gao H. A polynomial invariant of virtual links // J. Knot Theory Ramifications. – 2013. – Vol. 22, №4. – P. 134-225.

- 62 Kauffman L.H. An affine index polynomial invariant of virtual knots // *J. Knot Theory Ramifications*. – 2013. – Vol. 22, №12. – P. 8.
- 63 Jin X., Zhang F. Zeros of the Jones polynomials for families of pretzel links // *Physica A*. – 2003. – Vol. 328. – P. 391-408.
- 64 Jin X., Zhang F. Jones polynomials and their zeros for a family of links // *Physica A*. – 2004. – Vol. 333. – P. 183-196.
- 65 Witten E. Quantum field theory and the Jones Polynomial // *Comm. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 121, №3. – P. 351-399.
- 66 Jones V.F. Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1985. – Vol. 12. – P. 103-111.
- 67 Kirillov A.N., Reshetikhin N.Y. Representations of algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // In book: *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups*. – Singapore, 1989. – P. 285-339.
- 68 Gepner D. Foundations of Rational Quantum Field Theory, I // <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9211100v2.pdf>. 04.08.2021.
- 69 Belavin V., Gepner D. Wenzl H. On $SO(N)$ spin vertex models // *Nuclear Phys. B*. – 2020. – Vol. 959. – P. 115-160.
- 70 Kaul R.K. The representations of Temperley-Lieb-Jones algebras // *Nuclear Phys. B*. – 1994. – Vol. 417. – P. 267-285.
- 71 Deguchi T., Wadati M., Akutsu Y. Knot theory based on solvable models at criticality. Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics // *Adv. Stud. Pure Math.* – 1989. – Vol. 19. – P. 193-285.
- 72 Akutsu Y., Wadati M. Knots, links, braids and exactly solvable models in statistical mechanics // *Comm. Math. Phys.* – 1988. – Vol. 117, №2. – P. 243-259.
- 73 Akutsu Y., Wadati M. Exactly solvable models and new link polynomials. I. N -state vertex models // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1987. – Vol. 56, №9. – P. 3039-3051.
- 74 Akutsu Y., Deguchi T., Wadati M. Exactly solvable models and new link polynomials. II. link polynomials for closed 3-braids // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1987. – Vol. 56, №10. – P. 3464-3479.
- 75 Deguchi T., Akutsu Y., Wadati M. Exactly solvable models and new link polynomials. III. Two-variable topological invariants // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1988. – Vol. 57, №3. – P. 757-776.
- 76 Deguchi T. (N) -vertex models // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1989. – Vol. 58, №10. – P. 3441-3444.
- 77 Deguchi T., Wadati M., Akutsu Y. Link polynomials constructed from solvable models in statistical mechanics // *J. Phys. Soc. Japan*. – 1988. – Vol. 57, №9. – P. 2921-2935.
- 78 Garrett L.A. An Exceptionally Simple Theory of Everything // <https://arxiv.org/pdf/0711.0770.pdf>.
- 79 Vieira R.S. Fifteen-vertex models with non-symmetric R -matrices // <https://arxiv.org/pdf/1908.06932.pdf>. 5.09.2020.
- 80 Sacco J.E., Wu F.Y. 32-vertex model on the triangular lattice // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1975. – Vol. 8, №01975. – P. 1780.

- 81 Pearce P.A. Recent progress in solving A-D-E lattice models // *Physica A.* – 2005. – Vol. 205. – P. 15-30.
- 82 Gusev E.V. Onsager approximation and asymptotically exact solution of the Ashkin-Teller model // *Theoret. Math. Phys.* – 1990. – Vol. 83, №1. – P. 396-402.
- 83 Kaul R.K. Chern-Simons theory, knot invariants, vertex models and three-manifold invariants // <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9804122.pdf>. 5.09.2020.
- 84 Kaul R.K., Ramadevi P. Three-manifold invariants from Chern-Simons field theory with arbitrary semi-simple gauge groups // *Comm. Math. Phys.* – 2001. – Vol. 217. – P. 295-314.
- 85 Kamada S. Braid and knot theory in dimension four // *Math. Surveys Monogr.* – 2002. – Vol. 95. – P. 11-13.
- 86 Касенова Т.К., Цыба П.Ю., Разина О.В. Исследование связи десятивершинной модели с полиномом Джонса // *Вестник КазНУТУ.* – 2020. – Том. 139, №3. – С. 694.
- 87 Belavin V., Gepner D., J.-Rong Li, Tessler R. The 4-CB Algebra and Solvable Lattice Models // <http://arxiv.org/abs/1909.02472v1> 5.09.2019.
- 88 Baxter R.J. The bulk, surface and corner free energies of the square lattice Ising model // <https://arxiv.org/pdf/1606.02029.pdf>. 22.05.2022.
- 89 Belavin V., Gepner D. Three blocks solvable lattice models and Birman-Murakami-Wenzl algebra // <https://arxiv.org/pdf/1807.05603.pdf>. 22.05.2022.
- 90 Belavin V., Gepner D. On the algebraic approach to solvable lattice models // *J. High Energ. Phys.* – 2019. – Vol. 1902. – P. 18-33.
- 91 Birman J.S., Wenzl H. Braids, link polynomials and a new algebra // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1989. – Vol. 313. – P. 249-273.
- 92 Murakami J. The Kauffman polynomial of links and representation theory // *Osaka J. Math.* – 1987. – Vol. 24, №4. – P. 745-758.
- 93 Bazhanov V.V., Sergeev S.M. An Ising-type formulation of the six-vertex model // <http://arxiv.org/abs/2205.10708v1>. 22.05.2022.
- 94 Miao Y. Generalised Onsager Algebra in Quantum Lattice Models // <https://arxiv.org/abs/2203.16594v2>. 10.06.2022.
- 95 Marra P., Inotani D., Nitta M. Braiding with Supersymmetric Majorana Lattices // <https://arxiv.org/abs/2207.10103>. 20.07.2022.
- 96 Kels A.P. Interaction-round-a-face and consistency-around-a-face-centered-cube // <https://arxiv.org/pdf/2003.08883.pdf>. 30.04.2021.
- 97 Lipton M., Strogatz S., Townsend A. Zeros of the electric field around a charged knot // <https://arxiv.org/abs/2204.10295>. 30.04.2022.
- 98 Freyd P., Yetter D., Hoste J. et al. A new polynomial invariant of knots and links // *Bull. Am. Math. Soc.* – 1985. – Vol. 12. – P. 239-246.
- 99 Akutsu Y., Wadati M. Knot invariants and the critical statistical systems // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1987. – Vol. 56. – P. 839-842.
- 100 Kauffman L.H. An invariant of regular isotopy // *Trans. Am. Math. Soc.* – 1990. – Vol. 318. – P. 417-471.
- 101 Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial // *Topology.* – 1987. – Vol. 26. – P. 395-407.

- 102 Jones V.F.R. On knot invariants related to some statistical mechanical models // Pacific J. Math. – 1989. – Vol. 137. – P. 311-334.
- 103 Jones V.F.R. Knot theory and statistical mechanics // Sci. Am. – 1990. – Vol. 263, №5. – P. 98-103.
- 104 Reshetikhin N.Y., Turaev V. Invariants of three manifolds via link polynomials and quantum groups // Invent. Math. – 1991. – Vol. 103. – P. 547-591.
- 105 Wu F.Y. Knot theory and statistical mechanics // Rev. Mod. Phys. – 1992. – Vol. 64, №4. – P. 235-268.
- 106 Ramadevi P. Vertex Models and Knot invariants // In book: Topology and Condensed Matter Physics. – Singapore: Springer, 2017. – Vol. 19. – P. 343-357.
- 107 Dhara S., Kaul R.K. et al. Bi-partite vertex model and multi-colored link invariants // <https://arxiv.org/pdf/1811.07538v1.pdf>. 25.11.2021.
- 108 Abdesselam B., Chakrabarti A. Multiparameter statistical models from $N^2 \times N^2$ braid matrices: Explicit eigenvalues of transfer matrices $T^{(r)}$, spin chains, factorizable scatterings for all N // <https://arxiv.org/pdf/0806.2371.pdf>. 25.11.2021.
- 109 Pimenta R.A., Martins M.J. The Yang-Baxter equation for PT invariant nineteen vertex models // <https://arxiv.org/pdf/1010.1274.pdf>. 25.11.2021.
- 110 Regts G., Sevenster B. Mixed partition functions and exponentially bounded edge-connection rank // <https://arxiv.org/pdf/1807.04494v1.pdf>. 25.11.2021.
- 111 Schrijver A. On virtual link invariants // <https://arxiv.org/pdf/1211.3572v2.pdf>. – 25.11.2021.
- 112 Polyakov E.A. Grassmann phase-space methods for fermions: uncovering classical probability structure // <http://arxiv.org/abs/1609.06360v1>.
- 113 Касенова Т.К., Цыба П.Ю., Разина О.В. Исследование связи десятивершинной модели с ХХЗ - моделью Гейзенберга // Вестник КазНПУ имени Абая. – 2019. – Т. 66, №2. – С. 157-163.
- 114 Ramadevi P. Exchange of Identical Particles // Resonance. – 2001. – Vol. 6. – P. 23-28.
- 115 Edge J.E. Skein theories for virtual tangles // <https://arxiv.org/pdf/2008.04294v1.pdf>. 10.08.2020.
- 116 Gabrovšek B., Güzümcü N. Invariants of multi-linkoids // <https://arxiv.org/pdf/2204.11234v1.pdf>. 24.04.2020.
- 117 Kauffman L.H. Combinatorial Knot Theory and the Jones Polynomial // <https://arxiv.org/abs/2204.12104v2>. 24.04.2020.
- 118 Chicherina D., Derkachov S.E., Spiridonov V.P. New elliptic solutions of the Yang-Baxter equation // Communications in Mathematical Physics. – 2014. – Vol. 345. – P. 507-543.
- 119 Cai J-Yi et al. Approximability of the Eight-vertex Model // Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik. – 2020. – Vol. 169, №4. – P. 1-18.
- 120 Tong D. Lectures on Supersymmetry // Lectures on Theoretical Physics. – 2022. – P. 45-70.
- 121 Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю. Представления алгебры $V_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -ортогональные полиномы и инварианты связей. – Л.: ЛОМИ, 1988. – С. 59.

- 122 Chen-Ning Y. Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction // *Exactly Solvable Models Of Strongly Correlated Electrons. Series: Advanced Series in Mathematical Physics.* – 1994. – Vol. 18. – P. 384-387.
- 123 Akutsu Y., Deguchi T., Wadati M. Exactly solvable models and new link polynomials. II. link polynomials for closed 3-braids // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1987. – Vol. 56, №10. – P. 3464-3479.
- 124 Iūšis, A., Bandzaitis A. Judejimo kiekio momento teorija kvantineje mechanicoje. – Vilnius: Mokslas, 1977. – P. 470.
- 125 Kaul R.K., Govindarajan T.R. Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links // *Nuclear Phys. B.* – 1992. – Vol. 380. – P. 293-333.
- 126 Frohlich J, Gawedzki K. Conformal field theory and geometry of strings // *Mathematical Quantum Theory Conference.* – 1993. – Vol. 57. – P. 22-44.
- 127 Bazhanov V.V., Stroganov Yu.G. Conditions of commutativity of transfer matrices on a multidimensional lattice // *Theoret. and Math. Phys.* – 1982. – Vol. 52, №1. – P. 105-113.
- 128 Bazhanov V.V., Stroganov Yu. G. Free fermion on a three-dimensional lattice and tetrahedron equation // *Nucl. Phys.* – 1984. – №4. – P. 435-454.
- 129 Stroganov Yu. G. Tetrahedron equation and spin integrable models on the cubic lattice // *Theoret. and Math. Phys.* – 1997. – Vol. 2, №110. – P. 141-167.
- 130 Takhtajan L.A. In *Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory.* – Singapore: World Scientific, 1990. – P. 208.
- 131 Васильев А.Н. Грассманова алгебра // *Соровский образовательный журнал.* – 1999. – №4. – С. 116-121.
- 132 Baxter R.J. Partition function for the eight-vertex model // *Ann. Phys.* – 1972. – Vol. 70. – P. 193-228.
- 133 Francesco P., Mathieu P., Senechal D. *Conformal Field Theory.* – Berlin: Springer-Verlag. – 1997. – P. 890.
- 134 Faddeev L.D., Reshetikhin N.Y., Takhtajan L.A. Quantum Lie groups and Lie algebras // *Leningrad, Math. J.* – 1990. – Vol. 1. – P. 193-236.
- 135 Drinfeld V.G. Quantum groups // *Proceed. internat. Congr. of Mathematicians.* – Berkeley, 1987. – P. 798-820.
- 136 Shnider S., Sternberg S. *Quantum Groups.* – Boston: International Press, 1993. – P. 371.
- 137 Демидов Е.Е. Квантовые группы. – М.: Факториал, 1998. – С. 128.
- 138 Chari V., Pressley A. *A Guide to Quantum Groups.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – P. 651.
- 139 Lambe L.A., Radford D.E. *Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups: An Algebraic Approach.* – Dordrecht: Kluwer. – 1997. – P. 292.
- 140 Hietarinta J. All solutions to the constant quantum Yang-Baxter equation in two dimensions // *Phys.Lett. A.* – 1992. – Vol. 165. – P. 245-251.
- 141 Etingof P, Schedler T., Soloviev A. Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation // *Duke Math. J.* – 1999. – №2. – P. 169-209.

- 142 Lu J.H., Yan M., Zhu YC. On set-theoretical Yang-Baxter equation // *Duke Math. J.* – 2000. – Vol. 104, №1. – P. 1-18.
- 143 Etingof P., Golberg O., Hensel S., Liu T., Schwendner A., Vaintrob D., Yudovina E. Introduction to representation theory // *American Mathematical Soc.* – 2011. – Vol. 59. – P. 5-18.
- 144 Dehornoy P. Set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, RC-calculus, and Garside germs // <https://arxiv.org/pdf/1403.3019.pdf>. 05.05.2020.
- 145 Kauffman L. H. *Knots and Physics.* – Singapore: World Sci, 1991. – P. 538.
- 146 Kassel C. *Quantum Groups.* – NY.: Springer-Verlag, 1995. – P. 531.
- 147 Majid S. *Foundations of Quantum Group Theory.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – P. 627.
- 148 Duplij S., Kotulska O., Sadovnikov A. Quantum Yang-Baxter equation and constant R-matrix over Grassmann algebra // *J Zhejiang Univ SCI.* – 2005. – Vol. 6A, №10. – P. 1065-1079.
- 149 Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // *Comm. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 123, №1. – P. 163-175.
- 150 Kauffman L.H., Lomonaco S.J. Braiding operators are universal quantum gates // *New J. Phys.* – 1991. – Vol. 6. – P. 134-139.
- 151 Dye H.A. Unitary solutions to the Yang - Baxter Equation in Dimension Four // *Quantum Information Processing.* – 2003. – Vol. 2. – P. 117-150.
- 152 Hietarinta J. Solving the two - dimensional constant quantum Yang - Baxter equation // *J. Math. Phys.* – 1993. – Vol. 34. – P. 1725-1756.
- 153 Korepin V.E., Bogoliubov N.M., Izergin A.G. *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* – Cambridge: Cambridge University press, 1997. – P. 555.
- 154 Забродин А.В. Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах // <https://math.hse.ru/data/2013/12/20/1281343575/Bethe%20ansatz>. 07.08.2021.
- 155 Sun P., Xin Zh. et al. Bethe states of the trigonometric SU (3) spin chain with generic open boundaries// *Nuclear Physics B.* – 2018. – №931. – P. 342-358.
- 156 Qiao Yi., Sun P., Xin Zh., Cao J., Yang W. Exact solution of an integrable anisotropic J_1 - J_2 spin chain model // <https://arxiv.org/pdf/1902.00688>. 07.08.2021.
- 157 Mei Zh., Bolech C.J. Derivation of matrix product states for the Heisenberg spin chain with open boundary conditions // *Physical review E.* – 2017. – Vol. 95. – P. 3.
- 158 Takeo I., Satoru O., Yao-Zhong Z. Reflection K-Matrices of the N -Vertex Model and xxz Spin-1 Chain with General Boundary Terms // *Nuclear Physics B.* – 1996. – Vol. 470. – P. 419-434.
- 159 Takahashi M. *Thermodynamics of one-dimensional solvable models.* – Cambridge: Cambridge university press, 1999. – P. 252.
- 160 Wang Y., Yang W.L., Cao J., Shi K. *Off-diagonal Bethe Ansatz for Exactly Solvable Models.* – London: Springer, 2015. – P. 296.
- 161 Frahm H., Rodenbeck C. Quantum spin ladder systems associated with SU(2|2) // *Jour. Phys.* – 1997. – Vol. A30. – P. 44-67.